Hochschule Karlsruhe
Technik und Wirtschaft
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES
Näher dran.

EIT Fakultät für Elektro- und Informationstechnik

Systemtheorie

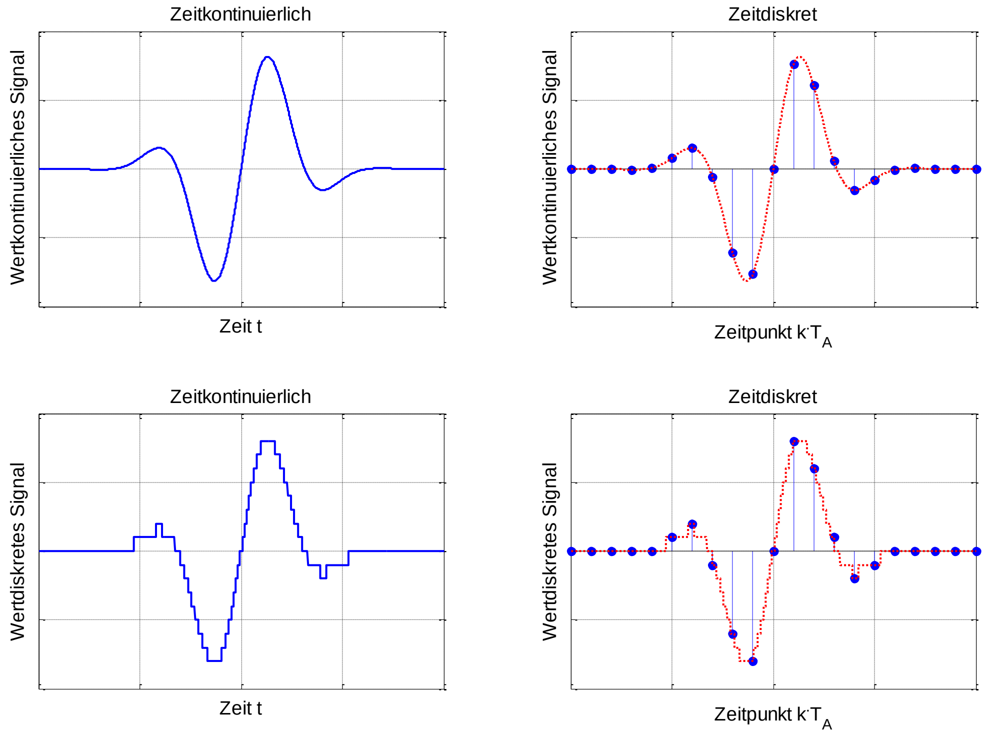
Vorlesung 2: Klassifizierung und Begrenzung von Signalen

Fakultät für Elektro- und Informationstechnik, Manfred Strohrmann

Zeitkontinuierliche Signale

Klassen von Signalen - Kontinuierliche und diskrete Signale

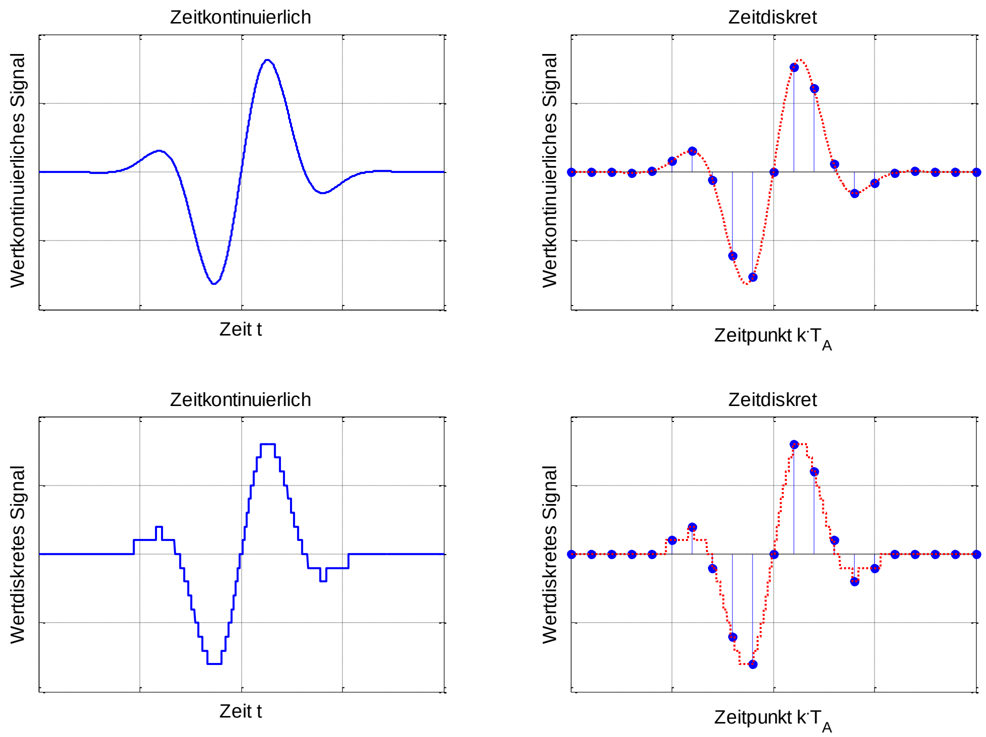
- Einteilung von Signalen in kontinuierliche und diskrete Signale
- Beispiel für zeitkontinuierliches Signal ist Spannungsverlauf an einem Mikrofon, es ist zu jedem beliebigen Zeitpunkt t definiert, sein Wertevorrat ist ebenfalls kontinuierlich, Signal ist zeitkontinuierlich und wertkontinuierlich
- Nach Analog-Digital-Wandler ist das Signal zu definierten Zeitpunkten einer endlichen Anzahl von Quantisierungsstufen zugeordnet, es ist zeit- und wertdiskret
- Beispiel für ein zeitdiskretes und wertekontinuierliches Signal ist die Messung einer wertkontinuierlichen Größe, die jeden Tag zu einer bestimmten Uhrzeit durchgeführt wird



Zeitkontinuierliche Signale

Klassen von Signalen - Kontinuierliche und diskrete Signale

- Ein wertediskretes und zeitkontinuierliches Signal ist zum Beispiel der Lagerbestand eines Bauteils, es können nur ganze Bauelemente dem Lager entnommen werden, so dass der Lagerbestand wertediskret ist, es ist aber zu jedem Zeitpunkt bekannt, wie viele Bauelemente eines bestimmten Typs vorhanden sind, das Signal ist deshalb zeitkontinuierlich.
- Vorlesung Systemtheorie beschränkt sich auf zeitkontinuierliche und wertkontinuierliche Systeme
- Zeitdiskrete Signale und Systeme werden in der Vorlesung Theorie digitaler Systeme behandelt



Zeitkontinuierliche Signale

Klassen von Signalen - Determinierte und zufällige Signale

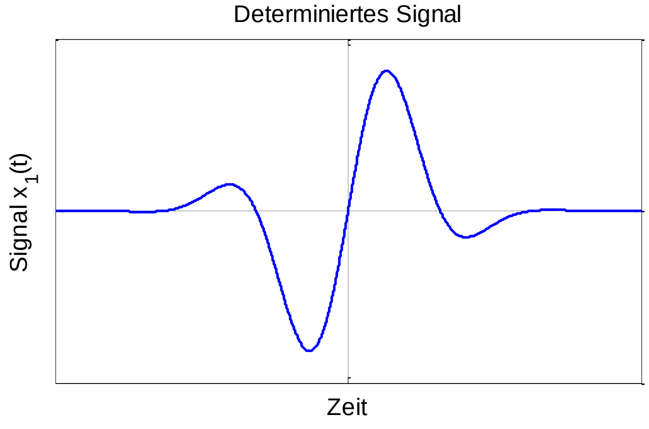
- Determinierte Signale lassen sich durch eine mathematische Vorschrift in ihrem zeitlichen Verlauf angeben, sie können implizit oder explizit definiert sein

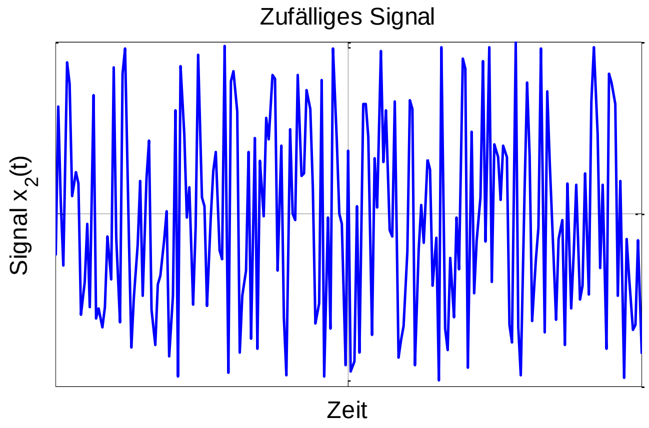
- Explizit definierte Signale geben die zu einem Zeitpunkt t gehörende Werte direkt an

$$x(t) = 10 \cdot e^{-a \cdot t^2} \cdot \sin(b \cdot t)$$

- Bei der impliziten Definition eines Signals ist der Signalwert zwar eindeutig bestimmt, er muss aber zunächst durch weitere Umformungen und ggf. Anfangsbedingungen bestimmt werden

$$\frac{dx}{dt} + 3 \cdot \frac{d^2x(t)}{dt^2} = 5 \cdot x(t) + \sin(\omega \cdot t)$$

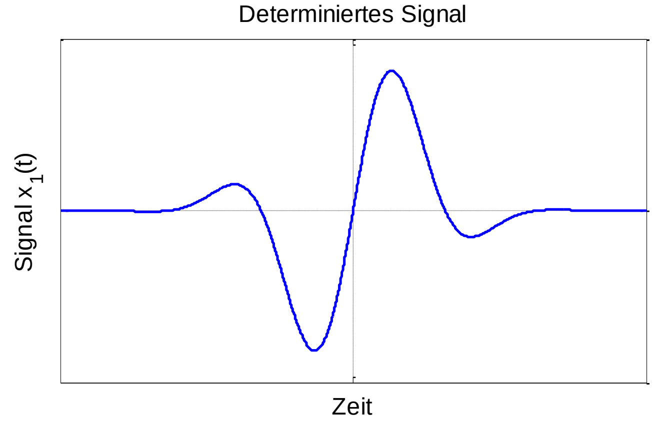


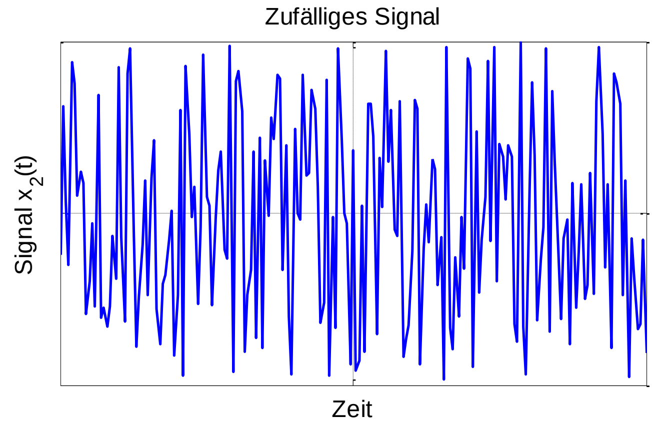


Zeitkontinuierliche Signale

Klassen von Signalen - Determinierte und zufällige Signale

- Zufällige Signale können nicht exakt angegeben werden, für sie sind lediglich statistische Eigenschaften bekannt
- Beispiele für zufällige Signale sind Rauschsignale, Fernsehsignale oder Sprachsignale
- Information, die übertragen werden soll, ist zufällig, wäre das Signal bekannt, müsste es nicht mehr übertragen werden.
- Deshalb sind zufällige Signale in der Informationstechnik von entscheidender Bedeutung
- Vorlesung Systemtheorie beschränkt sich auf determinierte Signale





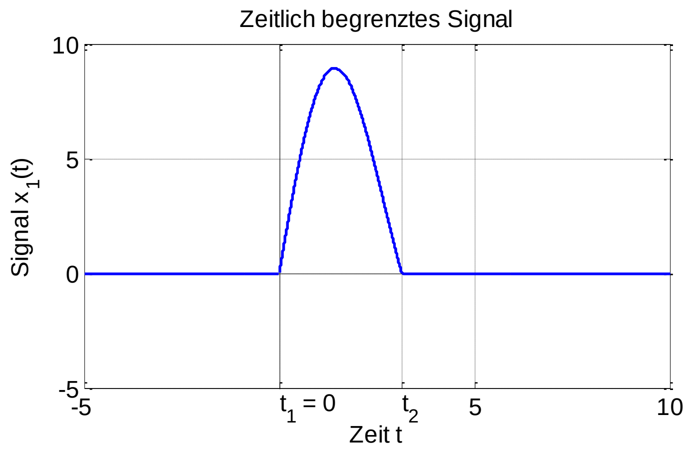
Zeitkontinuierliche Signale

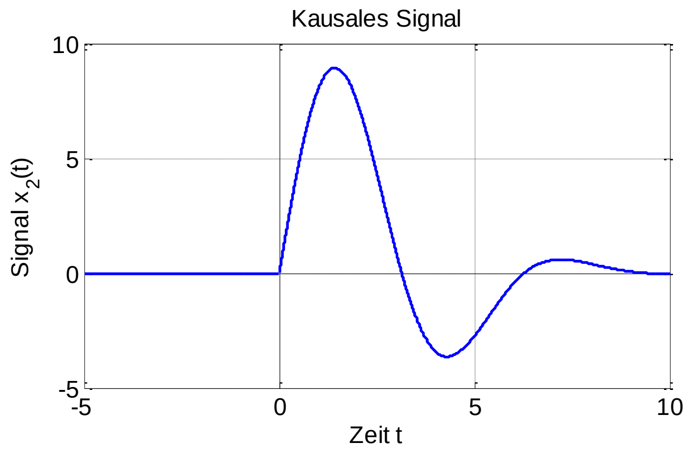
Klassen von Signalen – Zeitlich begrenzte und kausale Signale

- In der Systemtheorie wird oft mit zeitlich begrenzten Signalen gearbeitet, da Signale und Systeme nur für begrenzte Zeiträume beobachtet werden können
- Außerdem werden zeitlich begrenzte Signale als Testsignale verwendet
- Ein spezielles begrenztes Signal ist ein kausales Signal, für das gilt

$$x(t) = 0 \quad \text{für } t < 0$$

- Auf die Bedeutung des Begriffes eines kausalen Signals wird bei der Diskussion von kausalen Systemen näher eingegangen





Zeitkontinuierliche Signale

Klassen von Signalen – Energie- und Leistungssignale

- Für die Existenz von uneigentlichen Integralen zum Beispiel bei der Fourier-Transformation ist der Begriff der Leistungs- und Energiesignale wesentlich
- Die an einem Widerstand umgesetzte Leistung $p_{el}(t)$ ist proportional zum Quadrat der anliegenden Spannung u(t) bzw. proportional zum Quadrat des durchfließenden Stromes i(t)

$$p_{el}(t) = \frac{u^2(t)}{R} = i^2(t) \cdot R$$

- Energie ergibt sich aus dem Integral der umgesetzten Leistung über der Zeit

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} p_{el}(t)\ dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u^2(t)}{R}\ dt = \int_{-\infty}^{\infty} i^2(t) \cdot R\ dt$$

- Für den Vergleich von Systemen sind vielfach Leistungsverhältnisse von Bedeutung, so dass auf einen konstanten Faktor verzichtet wird und verallgemeinernd die Energie eines Signals x(t) definiert wird als

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\ dt$$

Zeitkontinuierliche Signale

Klassen von Signalen – Energie- und Leistungssignale

- Energiesignale haben eine von Null verschiedene und endliche Gesamtenergie in dem Intervall von $-\infty < t < \infty$, mathematische Bedingung für Energiesignale lautet

  $$0 < \int_{-\infty}^{\infty} \left|x(t)\right|^2 \, dt < \infty$$

  Diese Bedingung ist für jedes zeitbegrenzte und amplitudenbegrenzte Signal erfüllt, Signale, die gleichzeitig zeit- und amplitudenbegrenzt sind, sind damit immer Energiesignale

- Leistungssignale haben dagegen eine von Null verschiedene und endliche mittlere Leistung im Intervall $-\infty < t < \infty$, mathematisch ergibt sich folgende Definition für Leistungssignale

  $$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \cdot \int_{-T/2}^{T/2} \left|x(t)\right|^2 \, dt < \infty$$

  Für Signale mit einer begrenzten Amplitude bedeutet das, dass sie nicht zeitbegrenzt sein müssen, ihre Energie ist zwar unendlich, ihre Energie im Zeitintervall T ist aber begrenzt

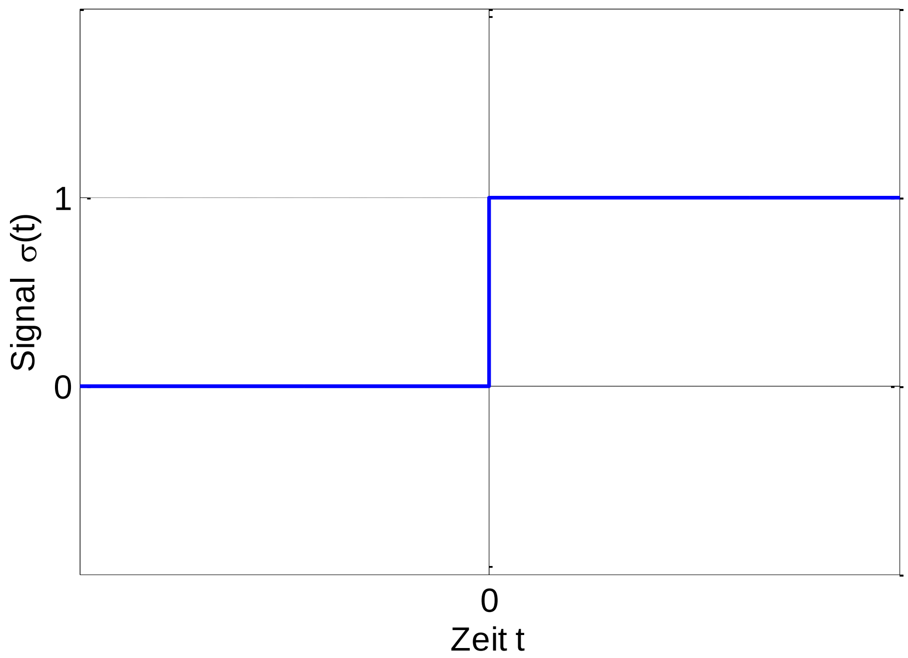
Zeitkontinuierliche Signale

Rechnen mit Sprung- und Impulsfunktion – Sprungfunktion

- Beschreibung und Interpretation von Systemen kann unter anderem über die Systemreaktion auf standardisierte Eingangssignale erfolgen
- Besondere Bedeutung haben Sprung- und Impulsfunktionen
- Definition Sprungfunktion

$$x(t) = \sigma(t) = \begin{cases} 0 \text{ für } t < 0 \\ 1 \text{ für } t \geq 0 \end{cases}$$

- Bei der Diskussion der Sprungstelle wird oftmals von linksseitigem und rechtsseitigem Grenzwert gesprochen: $x(0_-) = 0$ und $x(0_+) = 1$
- Sprungfunktion wird zum Beispiel dafür verwendet, ideale Einschaltvorgänge zu beschreiben



Zeitkontinuierliche Signale

Rechnen mit Sprung- und Impulsfunktion – Rechteckfunktion

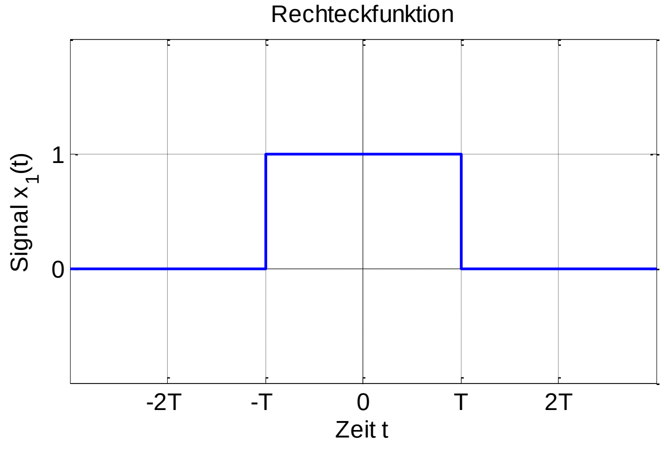
- Rechteckfunktion kann über Sprungfunktionen definiert werden

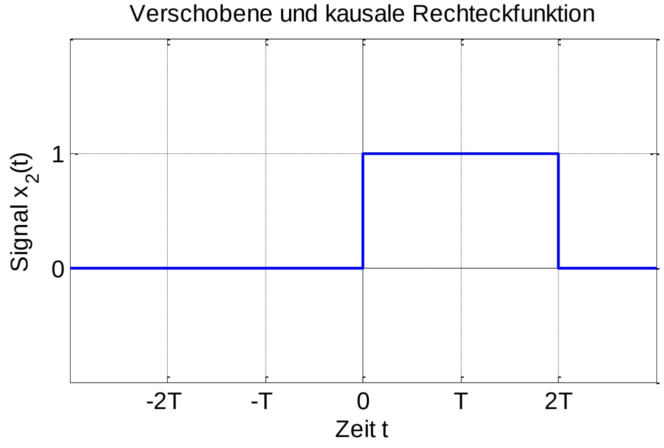
$$x_1(t) = \sigma(t+T) - \sigma(t-T)$$

- Sie ist keine kausale Funktion, kann aber durch eine Zeitverschiebung zu einer kausalen Funktion gemacht werden

- Für die kausale Rechteckfunktion gilt

$$x_2(t) = \sigma(t) - \sigma(t-2\cdot T)$$





Zeitkontinuierliche Signale

Rechnen mit Sprung- und Impulsfunktion – Signum-Funktion

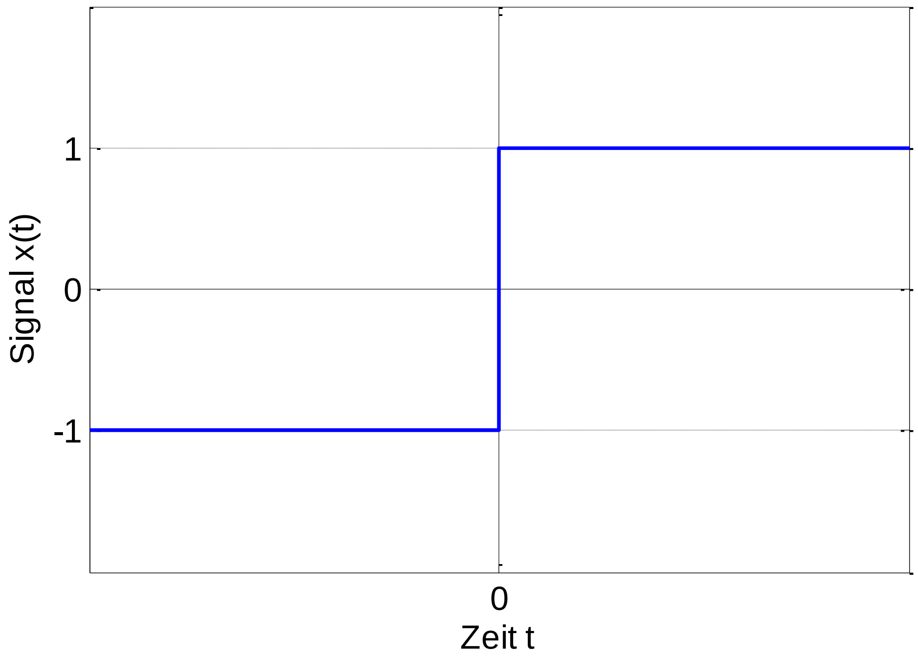
- Signum-Funktion ist abschnittsweise definiert als

$$x(t) = \mathrm{sgn}(t) = \begin{cases} -1 \text{ für } t < 0 \\ +1 \text{ für } t \geq 0 \end{cases}$$

- Sie kann mit Sprungfunktonen dargestellt werden als

$$x(t) = \mathrm{sgn}(t) = 2 \cdot \sigma(t) - 1$$

- Sie ist nicht kausal und kann durch eine zeitliche Verschiebung auch nicht kausal werden, da sie für t < 0 nicht null ist.



Zeitkontinuierliche Signale

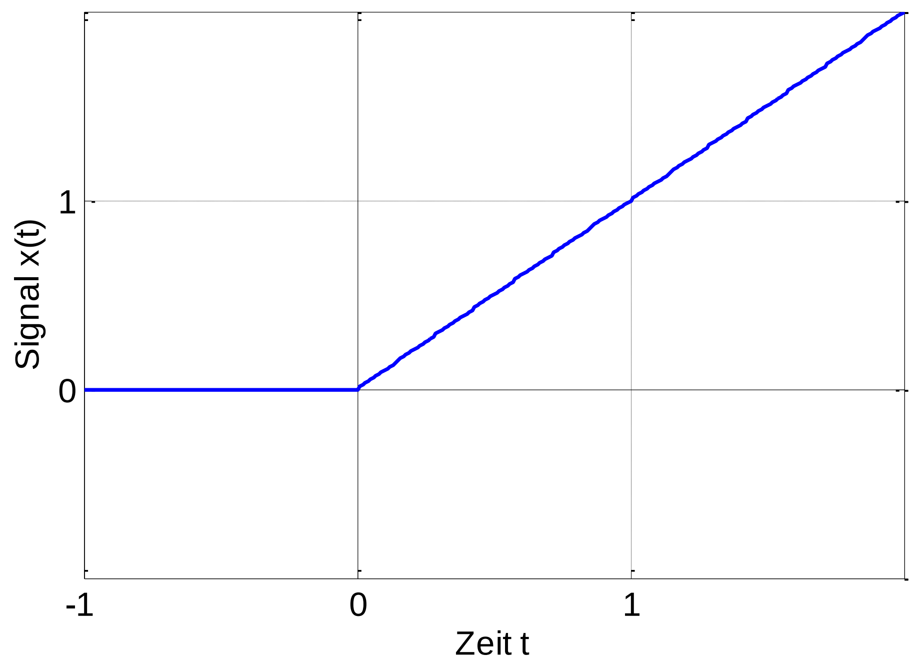
Rechnen mit Sprung- und Impulsfunktion – Rampenfunktion

- Die Sprung-, Rechteck- und Signum-Funktionen lassen sich wegen der unendlich großen Signaländerung an den Unstetigkeitsstellen nur näherungsweise realisieren
- Außerdem können Systeme, die mit einem idealen Spannungssprung angeregt werden, zerstört werden, Beispiel Turbine Wasserkraftwerk
- Rampenfunktion bietet einen stetigen Übergang zwischen dem Zeitraum $t < 0$ und dem Zeitraum $t \geq 0$, sie ist definiert als

$$x(t) = \begin{cases} 0 \text{ für } t < 0 \\ t \text{ für } t \geq 0 \end{cases}$$

oder als Produkt von Sprungfunktion und Zeit t

$$x(t) = t \cdot \sigma(t)$$

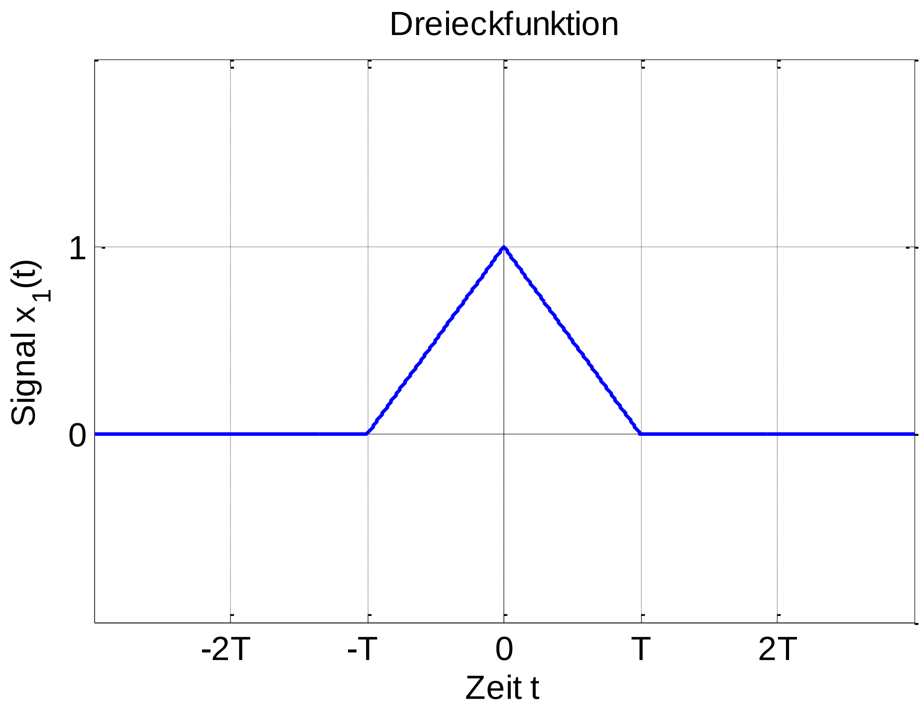


Zeitkontinuierliche Signale

Übungsaufgabe: Rechnen mit Sprung- und Impulsfunktion – Dreieckfunktion

- Dreieckfunktion ist definiert als

$$x(t)=\begin{cases}0 & \text{für } t<-T\\ 1+t/T & \text{für } -T\leq t<0\\ 1-t/T & \text{für } 0\leq t<T\\ 0 & \text{für } T\leq t\end{cases}$$



- Dreieckfunktion kann auf unterschiedliche Art aus den bereits dargestellten Funktionen gewonnen werden
- Stellen Sie die Dreieckfunktion mit Hilfe von Sprungfunktionen dar
- Stellen Sie eine kausale Dreieckfunktion mit Hilfe von Sprungfunktionen dar

Zeitkontinuierliche Signale

Rechnen mit Sprung- und Impulsfunktion – Zusammenfassung Sprungfunktion

Testfunktion	Mathematische Beschreibung
Sprungfunktion	$x(t) = \sigma(t) = \begin{cases} 0 \text{ für } t < 0 \\ 1 \text{ für } t \geq 0 \end{cases}$
Rechteckfunktion der Länge 2·T	$x(t) = \sigma(t+T) - \sigma(t-T)$
Signum-Funktion	$x(t) = 2 \cdot \sigma(t) - 1$
Rampenfunktion	$x(t) = \int_{-\infty}^{t} \sigma(\tau)\ d\tau = t \cdot \sigma(t) = \begin{cases} 0 \text{ für } t < 0 \\ t \text{ für } t \geq 0 \end{cases}$
Impulsfunktion	$x(t) = \delta(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \cdot \left(\sigma\left(t + \frac{\varepsilon}{2}\right) - \sigma\left(t - \frac{\varepsilon}{2}\right) \right)$