Hochschule Karlsruhe
Technik und Wirtschaft
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES
Näher dran.

EIT Fakultät für Elektro- und Informationstechnik

Systemtheorie

Vorlesung 3: Impulsfunktion und Signalalgebra

Fakultät für Elektro- und Informationstechnik, Manfred Strohrmann

Zeitkontinuierliche Signale

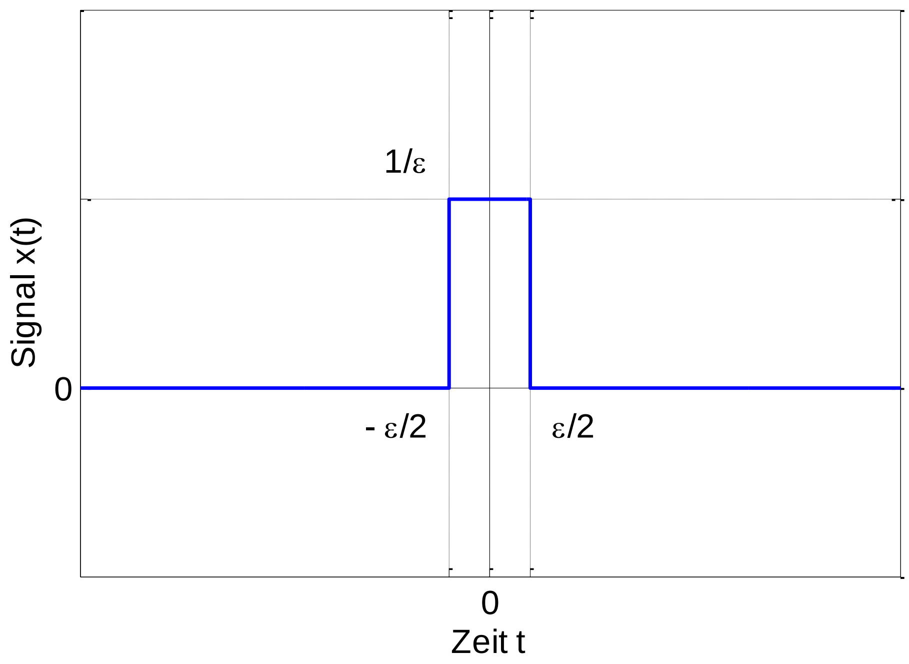
Rechnen mit Sprung- und Impulsfunktionen – Definition der Impulsfunktion

- Impulsfunktion ist von großer Bedeutung für die Charakterisierung von Systemen
- Sie ist als Grenzwert einer Rechteckfunktion $\delta_\varepsilon(t)$ definiert, die eine Breite ε und der Höhe $1/\varepsilon$ aufweist

$$\delta_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \left(\sigma\left(t + \frac{\varepsilon}{2} \right) - \sigma\left(t - \frac{\varepsilon}{2} \right) \right)$$

- Über eine Grenzwertbetrachtung $\varepsilon \to 0$ geht diese Rechteckfunktion über in die Impulsfunktion $\delta(t)$

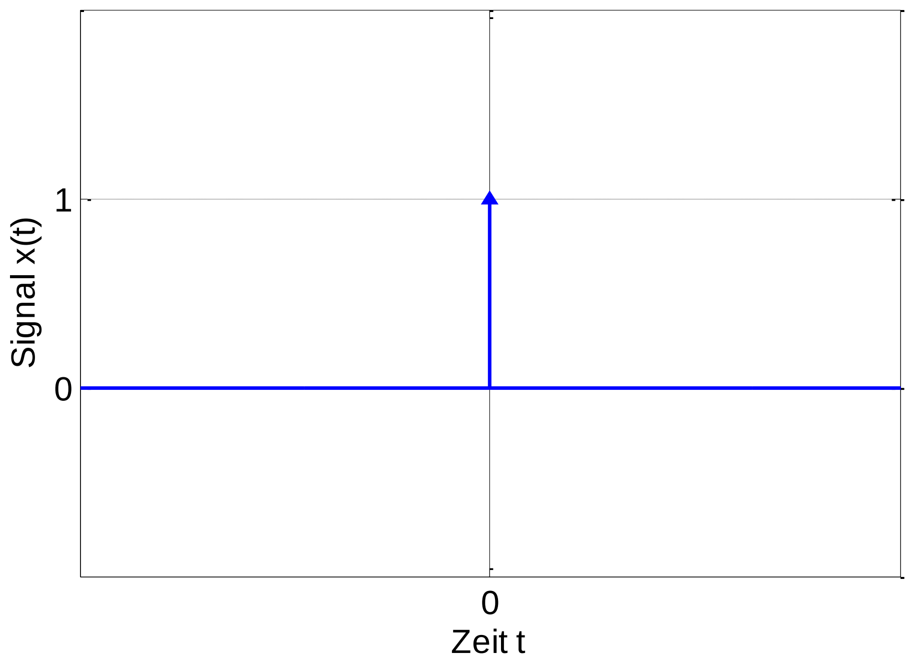
$$\delta(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \begin{cases} 0 \text{ für } t < -\varepsilon/2 \\ 1/\varepsilon \text{ für } -\varepsilon/2 < t < \varepsilon/2 \\ 0 \text{ für } \varepsilon/2 \le t \end{cases}$$



Zeitkontinuierliche Signale

Rechnen mit Sprung- und Impulsfunktionen – Definition der Impulsfunktion

- Impulsfunktion $\delta(t)$ ist ein unendlich kurzer Impuls an der Stelle t = 0, der eine unendlich große Höhe hat
- Unendliche große Höhe wird durch einen Pfeil an der Stelle t = 0 dargestellt
- Impulsfunktion ist als Grenzwert gewöhnlicher Funktion beschrieben, neben der dargestellten Herleitung über die Rechteckfunktion können auch andere Funktionen verwendet werden
- Anschauliche Interpretation als Hammerschlag gegen eine Glocke, sie wird für eine extrem kurze Zeit mit großer Leistung angeregt und antwortet auf die Anregung mit einer Schwingung, die charakteristisch für sie ist



Zeitkontinuierliche Signale

Rechnen mit Sprung- und Impulsfunktionen – Integral der Impulsfunktion

- Das Integral der Funktion von t = - ∞ bis + ∞ berechnet sich zu

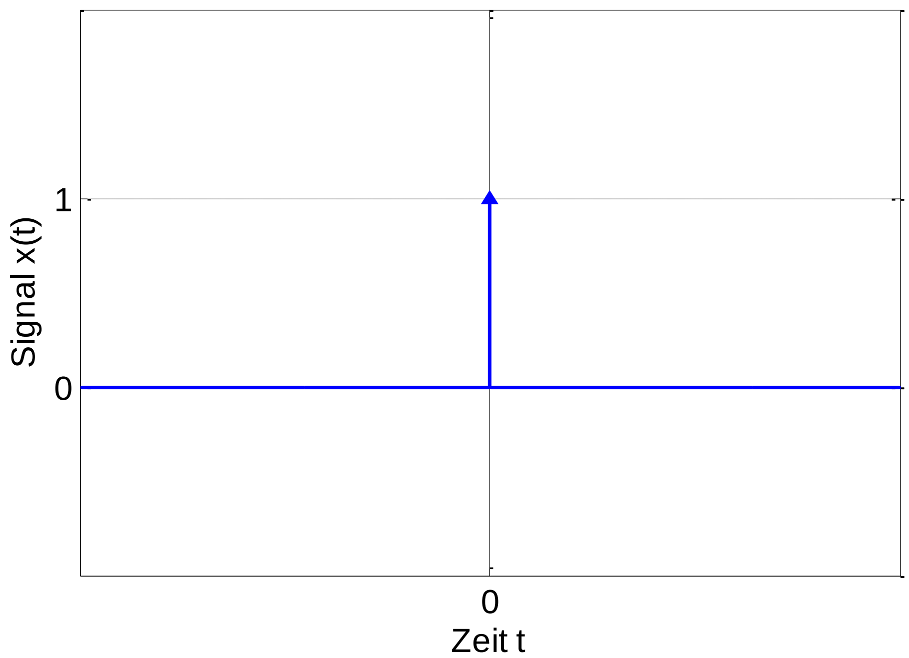
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\ dt = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\varepsilon/2}^{\varepsilon/2} 1/\varepsilon\ dt = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \cdot \left(\frac{\varepsilon}{2} - \left(-\frac{\varepsilon}{2} \right) \right)$$

$$= \left(\frac{\varepsilon}{2 \cdot \varepsilon} - \left(-\frac{\varepsilon}{2 \cdot \varepsilon} \right) \right) = 1$$

- Integral über die Impulsfunktion ist demnach 1, das Integral der Impulsfunktion wird als Gewicht der Impulsfunktion bezeichnet und über die Länge des Pfeils dargestellt

- Bei zeitlicher Skalierung errechnet sich das Integral mit Substitution zu

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(a \cdot t)\ dt = \frac{1}{|a|}$$



Zeitkontinuierliche Signale

Versuch: Impulsantwort einer Klangschale

- Verdeutlichung der Impulsfunktion anhand eines Videos
- Klangschale wird mit einem Hammerschlag angeregt
- Hammerschlag entspricht einem Impuls
- Klangschale antwortet mit einer Impulsantwort, die charakteristisch für diese Klangschale ist
- Für die vollständige Charakterisierung ist ein sehr kurzer und harter Impuls notwenig

Zeitkontinuierliche Signale

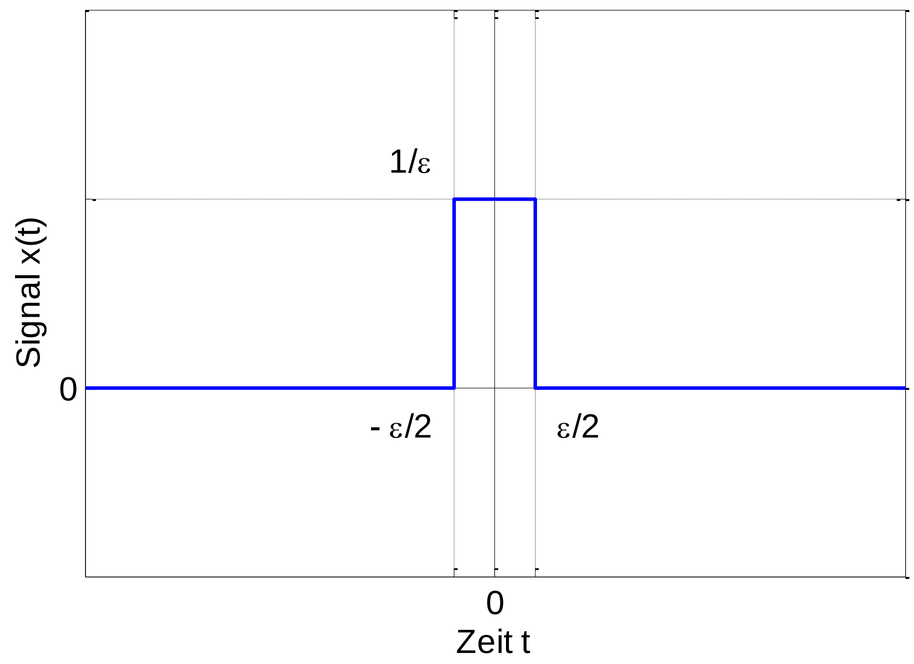
Rechnen mit Sprung- und Impulsfunktionen – Stammfunktion der Impulsfunktion

- Stammfunktion der Impulsfunktion wird über die Näherung für die Impulsfunktion bestimmt
- Stammfunktion ergibt sich mit der Rechteckfunktion $\delta_\varepsilon(t)$ aus

$$\int_{-\infty}^{t} \delta_\varepsilon(\tau)\, d\tau = \begin{cases} 0 & \text{für } t < -\varepsilon/2 \\ \frac{1}{\varepsilon}\cdot t + \frac{1}{2} & \text{für } -\varepsilon/2 \le t < \varepsilon/2 \\ 1 & \text{für } \varepsilon/2 \le t \end{cases}$$

- Ableitung der verallgemeinerten Sprungfunktion $\sigma_\varepsilon(t)$ berechnet sich zu

$$\frac{d\sigma_\varepsilon}{dt} = \left\{ \begin{matrix} 0 \text{ für } t < -\varepsilon/2 \\ 1/\varepsilon \text{ für } -\varepsilon/2 \le t < \varepsilon/2 \\ 0 \text{ für } \varepsilon/2 \le t \end{matrix} \right\} = \delta_\varepsilon(t)$$



Zeitkontinuierliche Signale

Rechnen mit Sprung- und Impulsfunktionen – Stammfunktion der Impulsfunktion

- Für den Übergang der verallgemeinerten Sprungfunktion zur Sprungfunktion wird der Grenzwert $\varepsilon \rightarrow 0$ gebildet

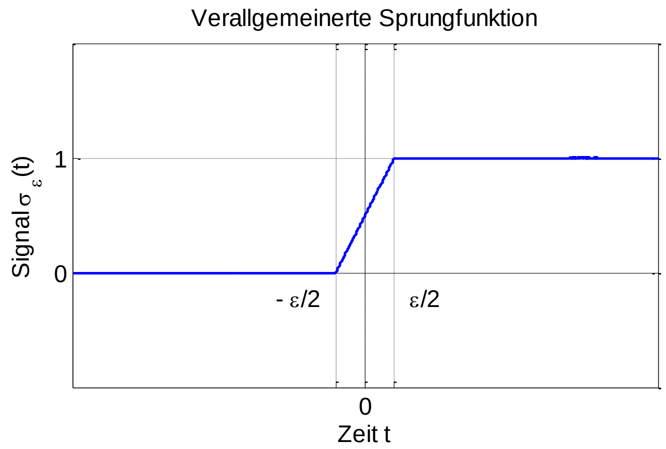
- Stammfunktion der Impulsfunktion $\delta(t)$ ergibt sich mit den Vorüberlegungen zu

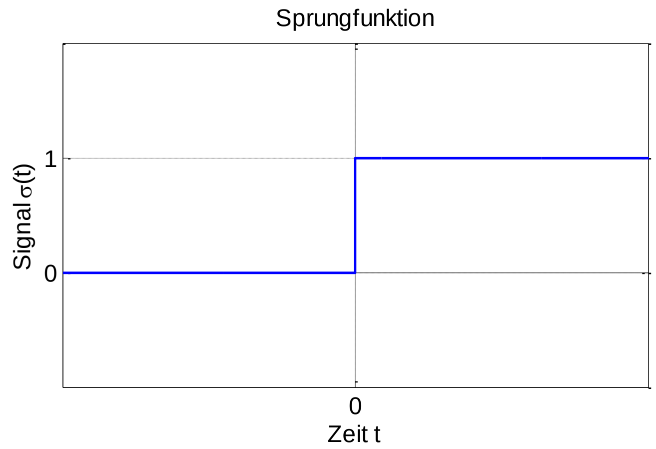
$$\int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\, d\tau = \sigma(t)$$

- Ableitung der Sprungfunktion $\sigma(t)$ berechnet sich mit den Vorüberlegungen zu

$$\frac{d\sigma}{dt} = \delta(t)$$

- Zusammenhang zwischen Sprung- und Impulsfunktion über Integration bzw. Differentiation





Zeitkontinuierliche Signale

Rechnen mit Sprung- und Impulsfunktionen – Ausblendeigenschaft der Impulsfunktion

- Aus der Auswertung des folgenden Integrals ergibt sich eine weitere wichtige Eigenschaft der Impulsfunktion

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \cdot x(t)\ dt = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \cdot \int_{-\varepsilon/2}^{\varepsilon/2} x(t)\ dt$$

- Mit dem Mittelwertsatz der Integralrechnung gibt es ein t_0 mit $a < t_0 < b$, für das gilt

$$\int_{a}^{b} x(t)\ dt = (b-a) \cdot x(t_0)$$

- Daraus ergibt ich die Ausblendeigenschaft der Impulsfunktion an der Stelle $t = 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \cdot x(t)\ dt = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \cdot \int_{-\varepsilon/2}^{\varepsilon/2} x(t)\ dt = x(0)$$

bzw. allgemein an der Stelle t_0

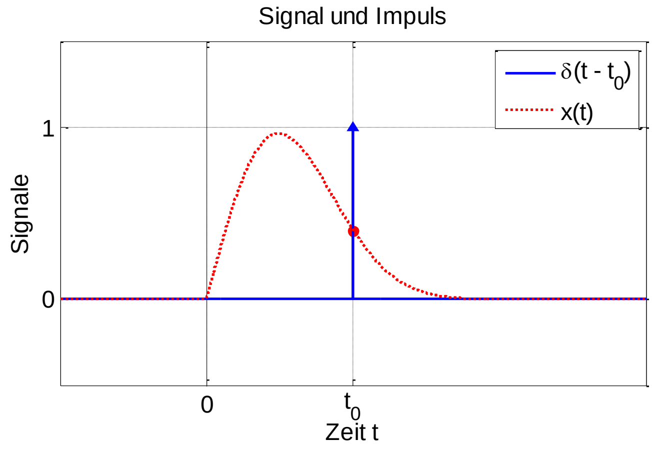
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0) \cdot x(t)\ dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \cdot x(t+t_0)\ dt = x(t_0)$$

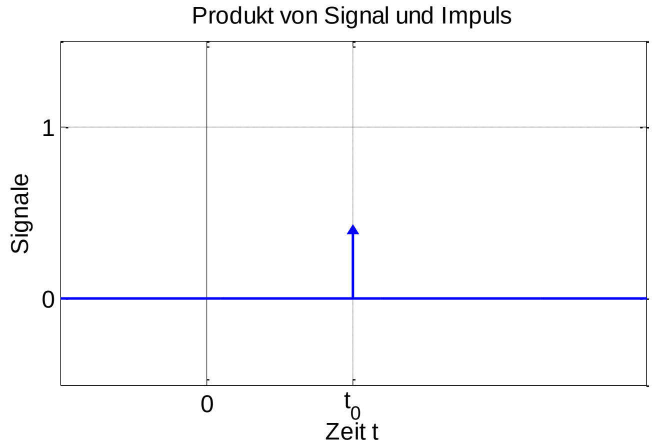
Zeitkontinuierliche Signale

Rechnen mit Sprung- und Impulsfunktionen – Ausblendeigenschaft der Impulsfunktion

- Grafische Veranschaulichung der Ausblendeigenschaft der Impulsfunktion
- Funktion x(t) und die Impulsfunktion an der Stelle t_0 werden miteinander multipliziert, das Produkt besteht aus einem Impuls mit dem Gewicht $x(t_0)$ an der Stelle t_0
- Gewicht des Impulses ist eine Konstante, sie kann aus dem Integral gezogen werden
- Übrig bleibt das Integral über eine Impulsfunktion, das nach den diskutierten Rechenregeln den Wert eins aufweist

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)\cdot x(t)\ dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\cdot x(t+t_0)\ dt = x(t_0)$$





Zeitkontinuierliche Signale

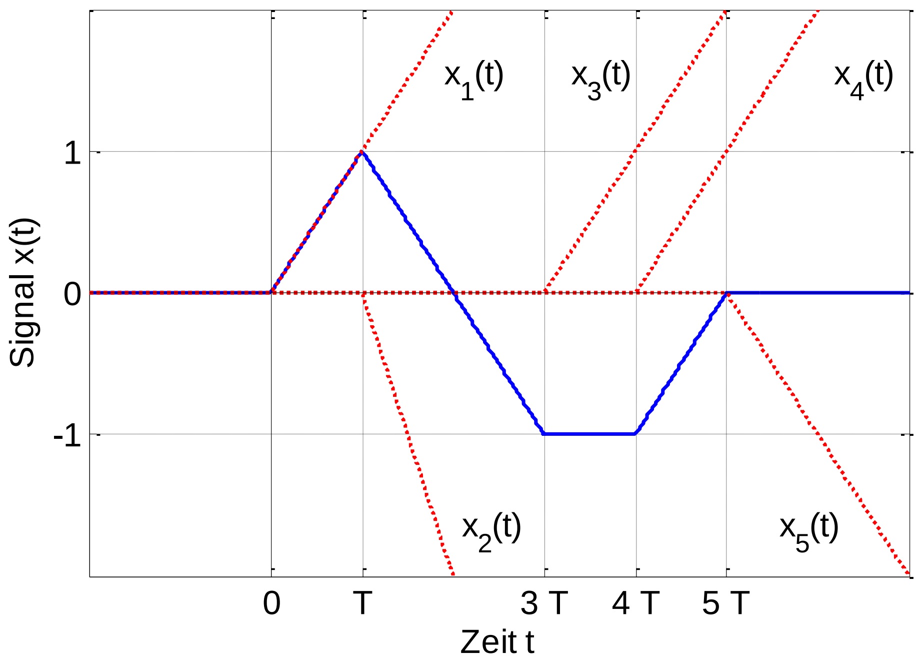
Rechnen mit Sprung- und Impulsfunktionen – Zusammenfassung Impulsfunktion

Testfunktion	Mathematische Beschreibung
Stammfunktion der Impulsfunktion	$x(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\ d\tau = \sigma(t)$
Ausblendeigenschaft der Impulsfunktion	$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) \cdot x(t)\ dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \cdot x(t + t_0)\ dt = x(t_0)$
Integral über die Impulsfunktion	$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\ dt = 1$
Integral über die skalierte Impulsfunktion	$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(a \cdot t)\ dt = \frac{1}{\|a\|}$

Zeitkontinuierliche Signale

Funktionsalgebra – Skalierung der Amplitude

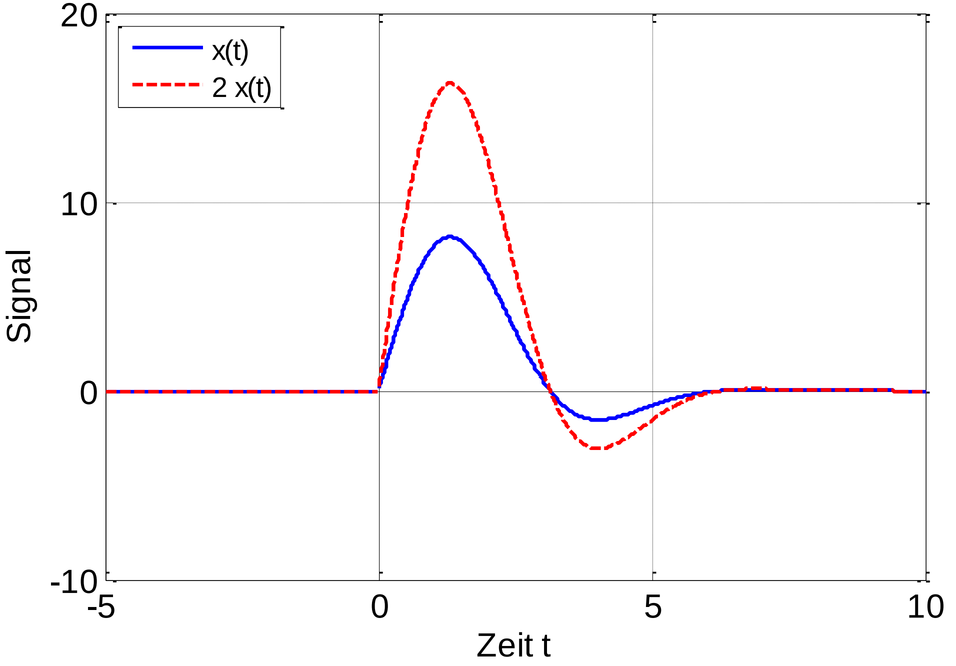
- Berechnung des Ausgangssignals eines linearen Systems kann auf bekannte Ausgangssignale zurückgeführt werden, wenn sich das Eingangssignal auf bekannte Eingangssignale zurückführen lässt
- Dazu ist es notwendig, die Signale mit Hilfe der in diesem Abschnitt dargestellten Funktionsalgebra umrechnen zu können
- Funktionsalgebra auch für Laplace- und Fourier-Transformation hilfreich, weil die Berechnung der Laplace- oder Fourier-Transformierten auf bekannte Korrespondenzen zurückgeführt werden kann



Zeitkontinuierliche Signale

Funktionsalgebra – Verschiebung und Skalierung der Amplitude

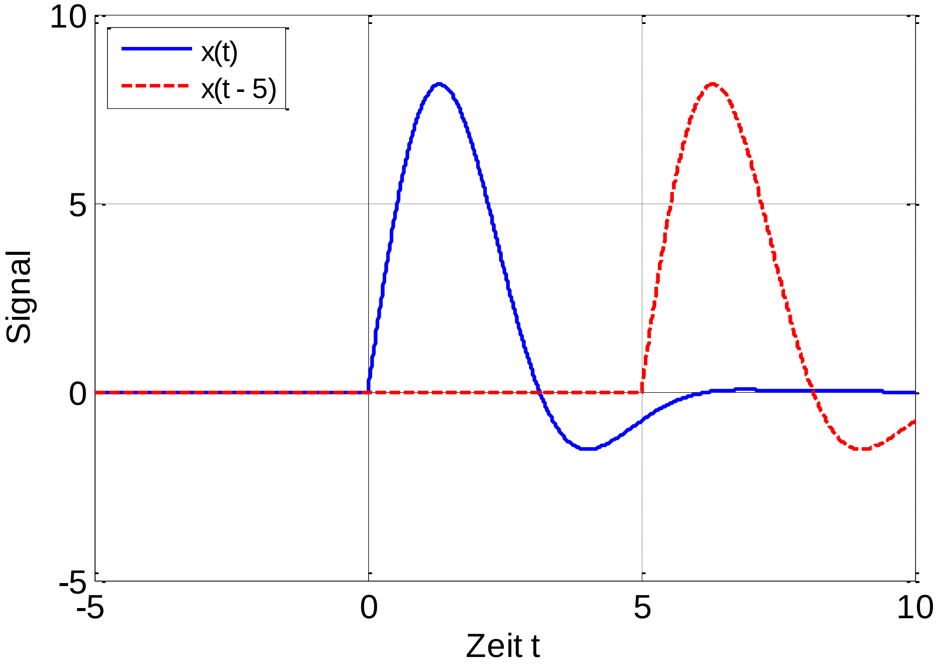
- Signal x(t) + k ist gegenüber dem Signal x(t) nach oben (k > 0) bzw. nach unten (k < 0) verschoben
- Signal a·x(t) ist gegenüber dem Signal x(t) verstärkt (a > 1) bzw. gedämpft (0 < a < 1)
- Beispiel mit einem Signal x(t) und einem um den Faktor 2 verstärktes Signal 2·x(t)



Zeitkontinuierliche Signale

Funktionsalgebra – Zeitliche Verschiebung

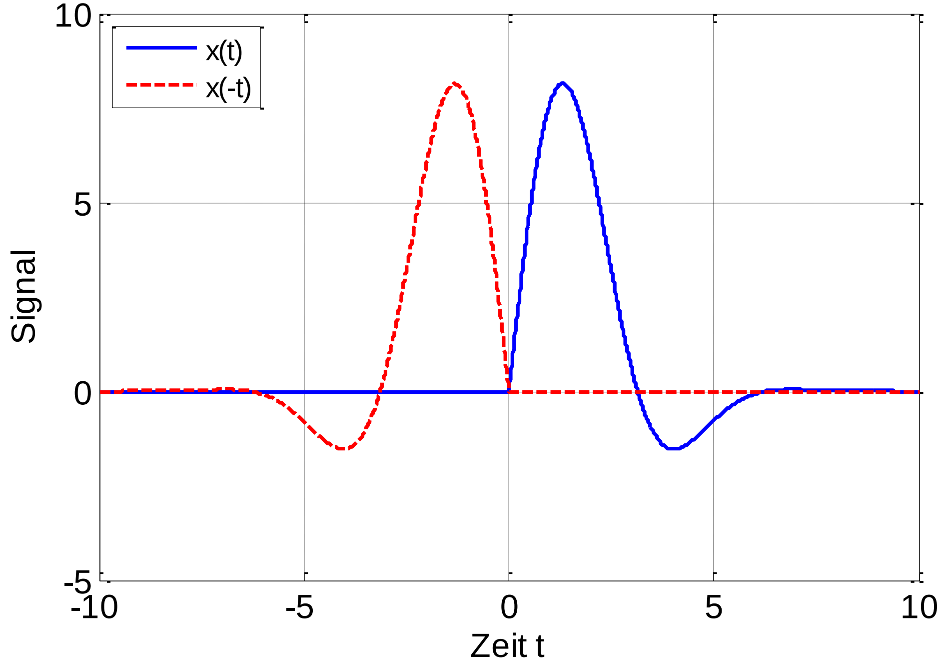
- Signal $x(t - t_0)$ ist gegenüber dem Signal x(t) nach rechts ($t_0 > 0$) bzw. nach links ($t_0 < 0$) verschoben
- Beispiel zeigt ein Signal x(t) und ein um $t_0 = 5$ verschobenes Signal x(t - 5)
- Signalverschiebung kann am besten über das Zeitargument erkannt werden: ist bei der blauen Funktion das Zeitargument t = 0, muss für den gleichen Funktionswert das Zeitargument t - 5 zu null werden, also ist die Funktion um $t_0 = 5$ verschoben



Zeitkontinuierliche Signale

Funktionsalgebra – Zeitliche Spiegelung

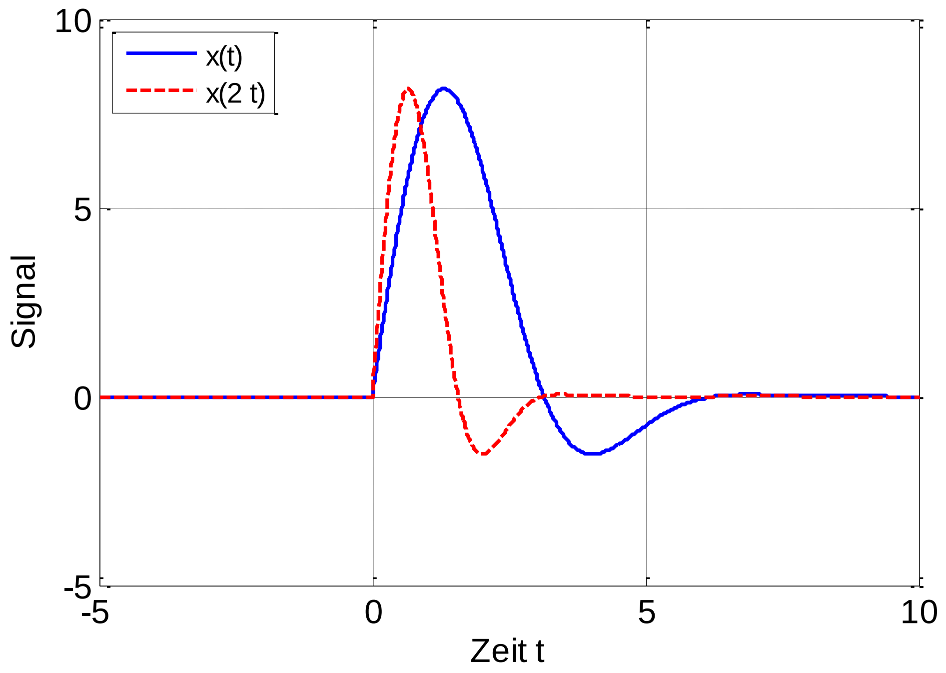
- Spiegelung eines Signals x(t) an der Stelle t = 0 kann mathematisch durch die Funktion x(- t) dargestellt werden
- Beispiel zeigt ein Signal x(t) und das gespiegelte Signal x(- t)
- Auch hier kann über das Zeitargument der Funktion argumentiert werden: die Funktion x(t) weist zum Zeitpunkt t = 1 den Funktionswert 8 auf, Funktion x(- t) besitzt denselben Funktionswert an der Stelle t = - 1



Zeitkontinuierliche Signale

Funktionsalgebra – Zeitliche Skalierung

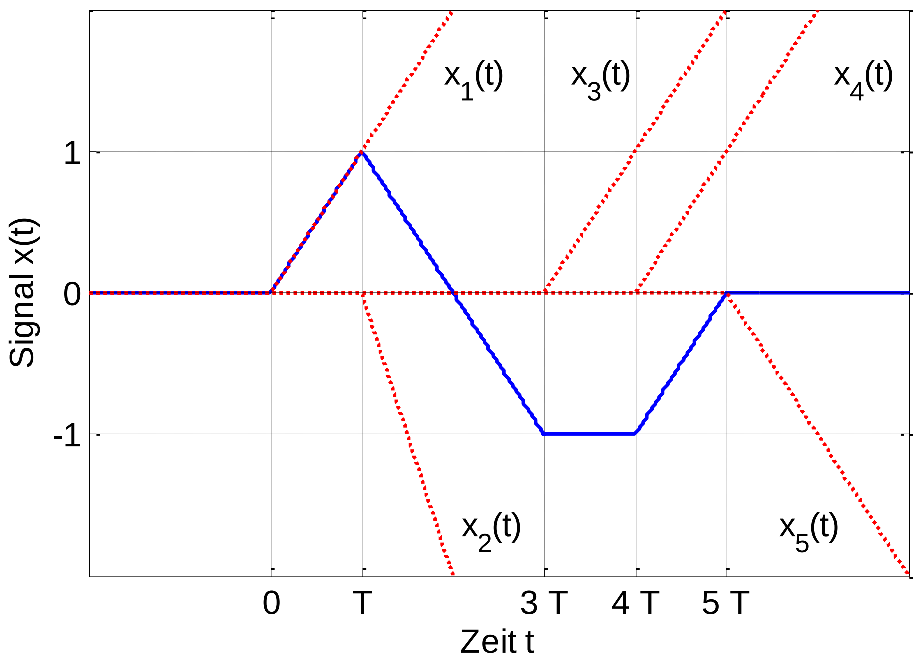
- Signal x(a·t) ist gegenüber dem Signal x(t)
  - gestaucht (a > 1)
  - gedehnt (0 < a < 1)
- Beispiel zeigt ein Signal x(t) und das gestauchte Signal x(2·t)
- Auch Stauchung und Dehnung werden am einfachsten deutlich, wenn über das Zeitargument der Funktion x(a·t) argumentiert wird



Zeitkontinuierliche Signale

Übungsaufgabe: Funktionsalgebra – Darstellung abschnittsweise definierter Funktionen

- Vorgestellte Sprung- und Impulsfunktionen und ihre Rechenregeln ermöglichen die Synthese weiterer Testfunktionen durch eine Kombination dieser Signale
- Rechnen mit Sprungfunktionen wird an einem Beispiel verdeutlicht
- Signal soll durch eine Kombination von Sprungfunktionen geschlossen dargestellt werden
- Stellen Sie eine Gleichung auf

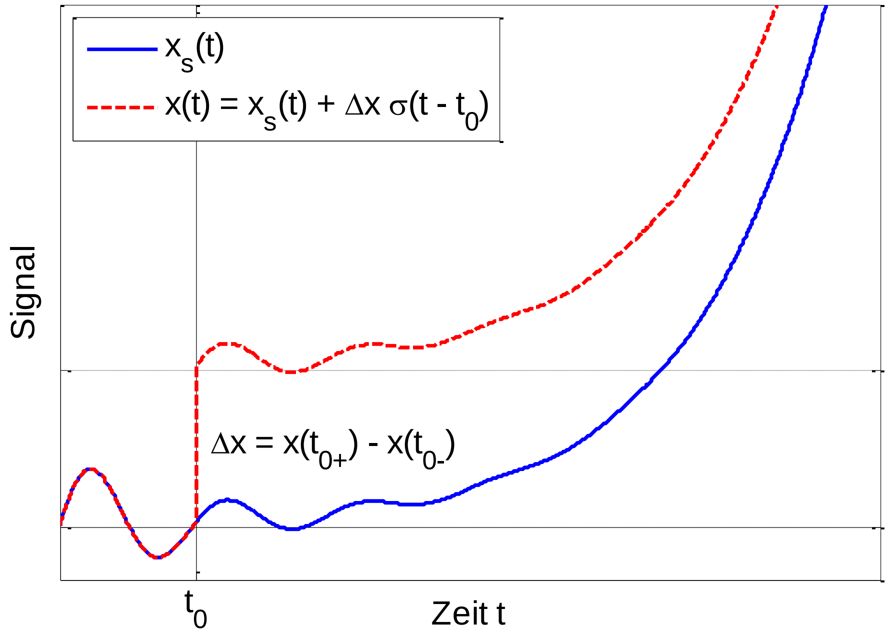


Zeitkontinuierliche Signale

Funktionsalgebra – Verallgemeinerte Ableitung

- Klassische Differentiationsregeln erlauben die Berechnung von Ableitungen für stetige Funktionen
- In der Systemtheorie werden aber Testfunktionen eingesetzt, die an einer Stelle oder mehreren Stellen Sprünge aufweisen
- Vorgehen zur Bestimmung einer verallgemeinerten Ableitung von Funktionen mit Sprüngen erforderlich
- Zerlegung einer Funktion mit einem Sprung an der Stelle $t = t_0$ in
  - eine stetige Funktion $x_s(t)$ und
  - einen idealen Sprung der Höhe Δx

$$\Delta x = x\left(t_{0+}\right) - x\left(t_{0-}\right)$$

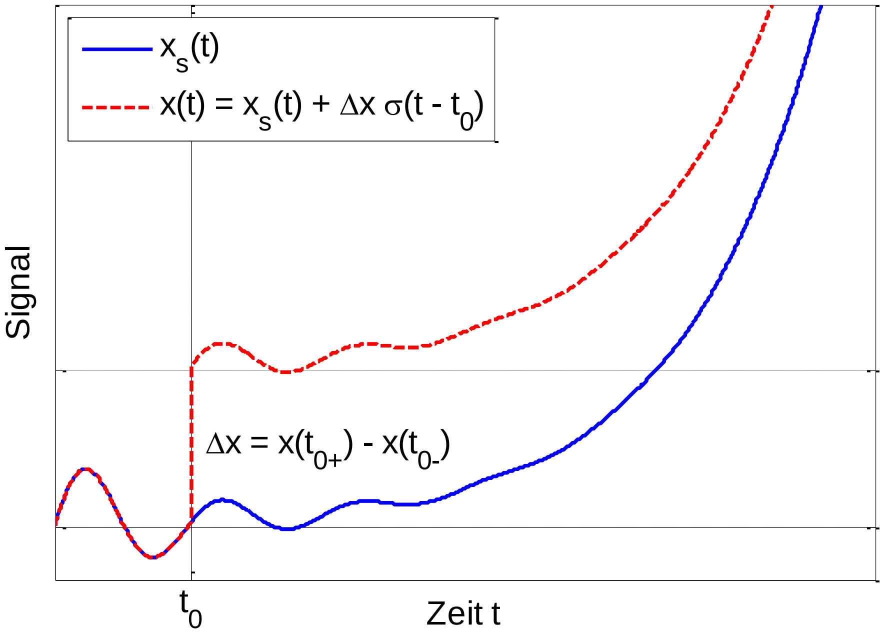


Zeitkontinuierliche Signale

Funktionsalgebra – Verallgemeinerte Ableitung

- Darstellung der Funktion mit Sprung

$$x(t) = x_s(t) + \sigma(t - t_0) \cdot \left(x(t_{0+}) - x(t_{0-})\right)$$
$$= x_s(t) + \sigma(t - t_0) \cdot \Delta x$$



- Unter Berücksichtigung der Rechenregel

$$\frac{d\sigma}{dt} = \delta(t)$$

ergibt sich die verallgemeinerte Ableitung

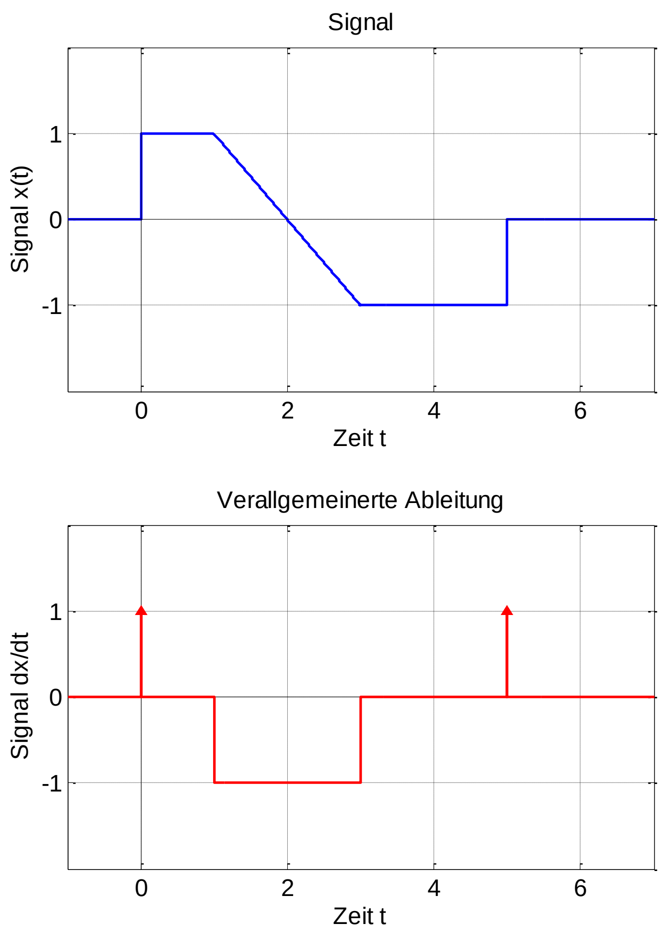
$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx_s}{dt} + \delta(t - t_0) \cdot \Delta x$$

- Verallgemeinerte Ableitung ergibt sich aus der Ableitung der stetigen Funktion $x_s(t)$ und einem Impuls an der Sprungstelle t_0 mit dem Gewicht der Sprunghöhe Δx

Zeitkontinuierliche Signale

Übungsaufgabe: Funktionsalgebra – Verallgemeinerte Ableitung

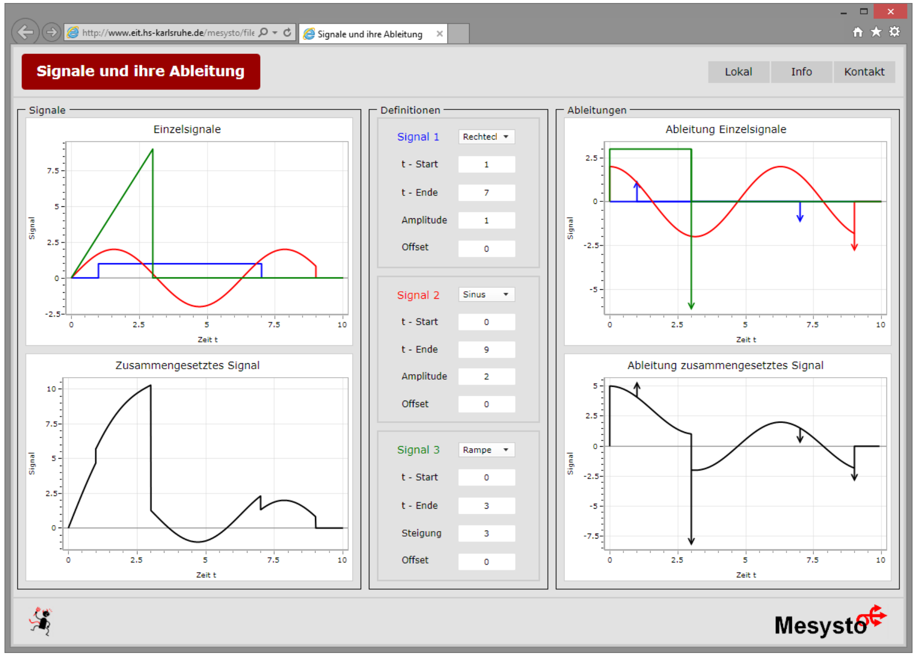
- Gegeben ist folgender Signalverlauf x(t). Für t > 6 hat das Signal den Wert null
- Stellen Sie das Signal als Kombination von Funktionen mit Sprüngen dar
- Berechnen Sie die Ableitung des Signals nach den Rechenregeln der Differentiation
- Vergleichen Sie das Ergebnis mit der grafischen Lösung



Zeitkontinuierliche Signale

Funktionsalgebra – Verallgemeinerte Ableitung

- Effekt kann mit Applikation für verschiedene Funktionen bestimmt werden
- Link auf Applikation in Systemtheorie Online verfügbar
- Einstellen unterschiedlicher Teilsignale, Berechnen der verallgemeinerten Ableitung
- Beispiel: Überlagerung verschiedener Signale
  - Sinusförmiges Signal
  - Rampe
  - Rechteck



Zeitkontinuierliche Signale

Funktionsalgebra – Zusammenfassung

Testfunktion	Mathematische Beschreibung
Skalierung der Amplitude	$y(t) = a \cdot x(t)$
Zeitliche Verschiebung um t_0 nach rechts	$y(t) = x(t - t_0)$
Zeitliche Spiegelung	$y(t) = x(-t)$
Zeitliche Skalierung	$y(t) = x(a \cdot t)$
Verallgemeinerte Ableitung eine Funktion x(t) mit Sprung Δx an der Stelle t_0	$\frac{dx}{dt} = \frac{dx_s}{dt} + \delta(t - t_0) \cdot \Delta x$