

Hochschule Karlsruhe
Technik und Wirtschaft
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Näher dran.

EIT Fakultät für Elektro-
und Informationstechnik

Systemtheorie

Vorlesung 4: Beschreibung periodischer Vorgänge

Zeitkontinuierliche Signale

Einschwingvorgänge – Periodische Funktionen

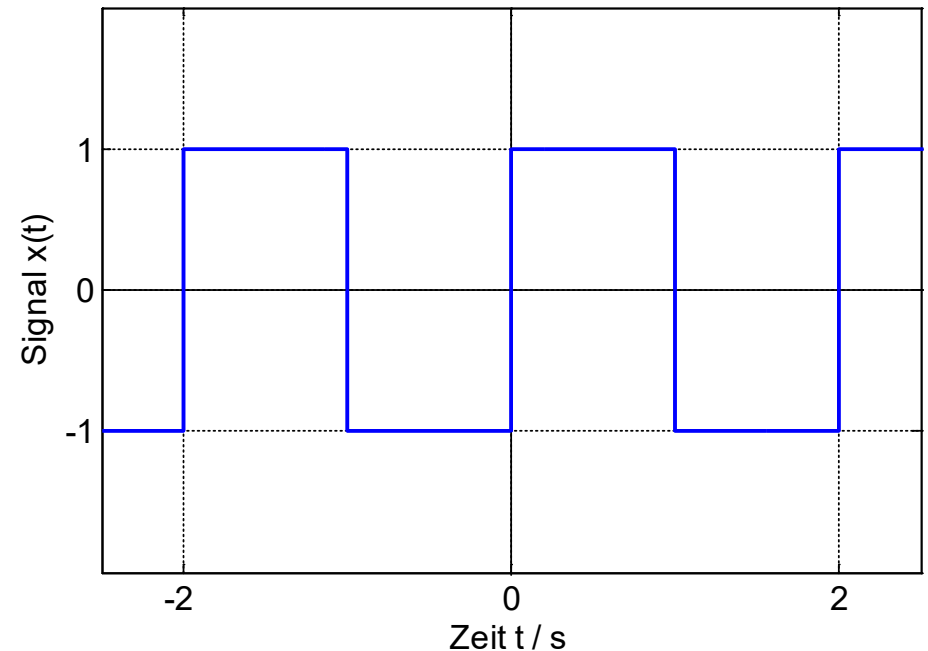
- Periodische Funktionen sind dadurch gekennzeichnet, dass sich der Funktionswert periodisch nach einer Zeitdauer T_0 wiederholt

- Beispiel periodisches Rechtecksignal

- Für periodische Funktionen und ganzzahlige Werte n gilt

$$x(t) = x(t + n \cdot T_0)$$

- Neben den Funktionen, die das Ein-, Aus- oder Umschalten modellieren, sind in der Systemtheorie periodische, harmonische Signale von großer Bedeutung



Zeitkontinuierliche Signale

Einschwingvorgänge – Harmonische Funktionen

- Definition harmonischer Signale mit der Kosinusfunktion

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi) = A \cdot \cos(\omega \cdot (t + t_0))$$

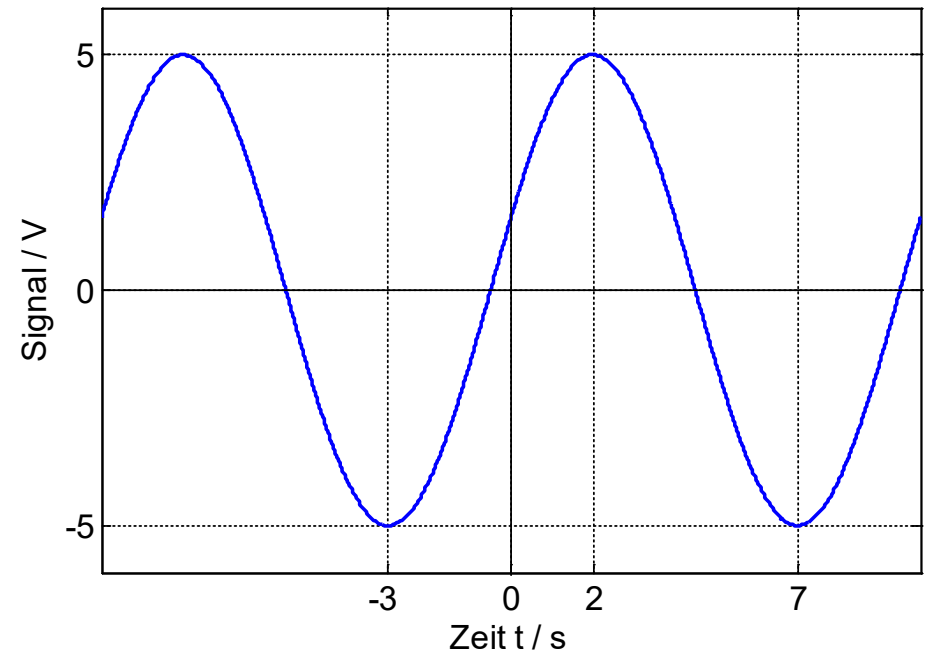
mit der Zeitverschiebung t_0 , dem Nullphasenwinkel φ , der Kreisfrequenz ω und der Amplitude A

- Bestimmung des Nullphasenwinkels über die Zeitverschiebung

$$t_0 = \frac{\varphi}{\omega}$$

- Kreisfrequenz ist definiert als

$$\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T_0} = 2 \cdot \pi \cdot f$$



Zeitkontinuierliche Signale

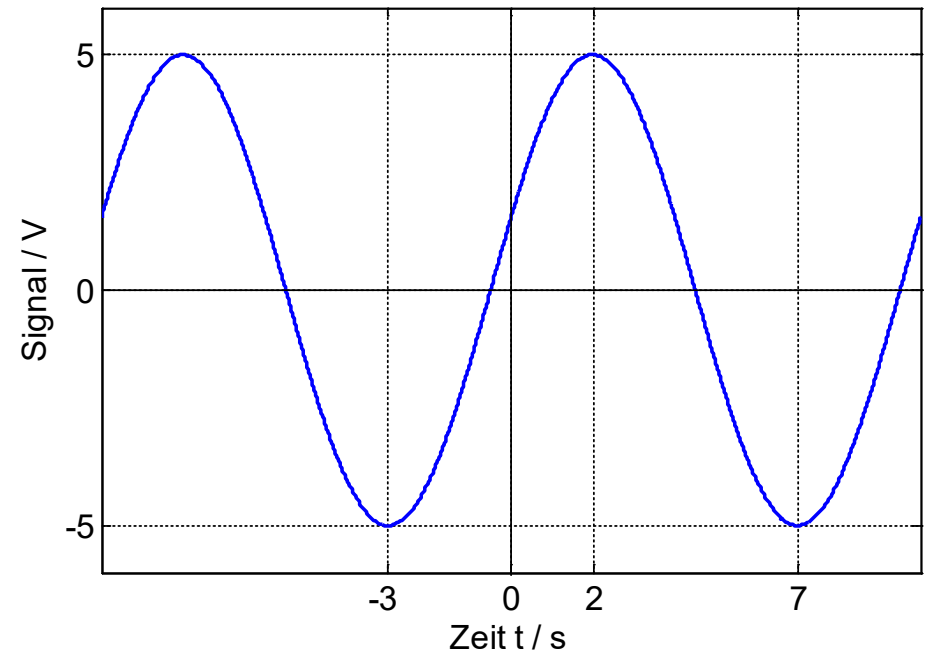
Beispiel: Einschwingvorgänge – Harmonische Funktionen

- Beispiel mit einer Amplitude 5 V
- Kosinusfunktion hat zwei aufeinander folgende Minima bei $t = -3$ s und $t = 7$ s, woraus sich eine Periodendauer von $T_0 = 10$ s ergibt
- Nullphase φ ist nicht unmittelbar aus dem Diagramm ablesbar, über die zeitliche Verzögerung

$$t_0 = \frac{\varphi}{2 \cdot \pi \cdot f} = \frac{\varphi}{2 \cdot \pi} \cdot T = -2 \text{ s}$$

kann der Nullphasenwinkel φ berechnet werden zu

$$\varphi = -\frac{2 \cdot \pi \cdot 2 \text{ s}}{10 \text{ s}} = -\frac{2 \cdot \pi}{5}$$



Zeitkontinuierliche Signale

Einschwingvorgänge – Harmonische Funktionen

- In der Elektrotechnik hat sich für die Berechnung von harmonisch angeregten Schaltungen die Zeigerdarstellung durchgesetzt

- Eulersche Formel

$$e^{j\varphi} = \cos(\varphi) + j \cdot \sin(\varphi)$$

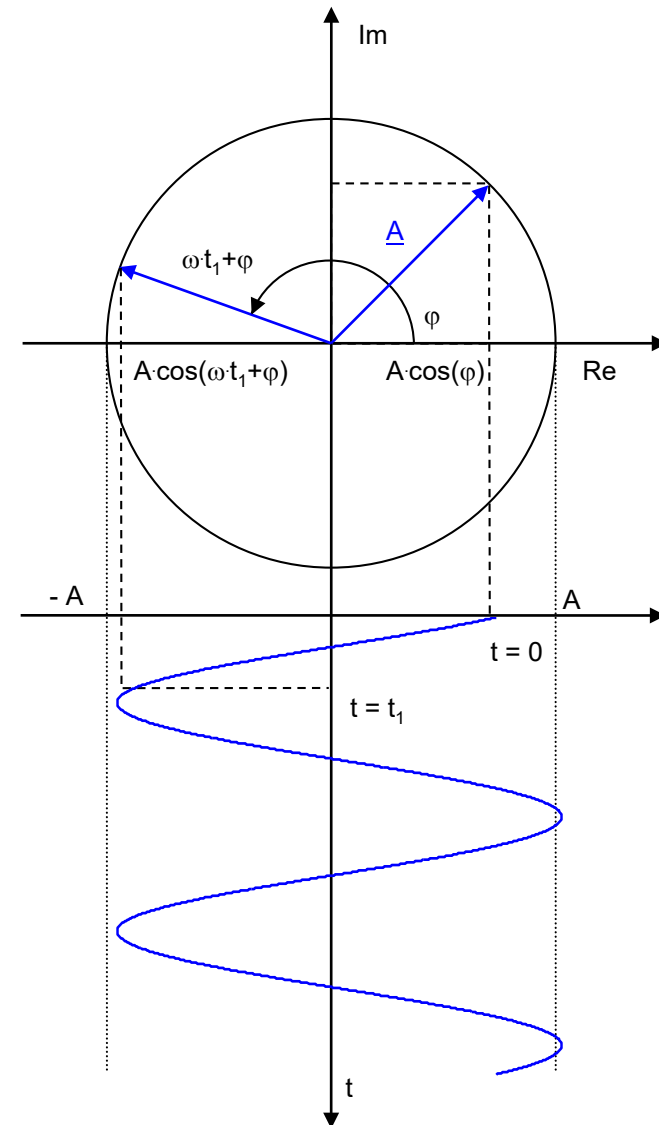
- Damit kann eine Kosinusfunktion der Form

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi)$$

als Realteil einer komplexen Funktion

$$\begin{aligned} z(t) &= A \cdot e^{j(\omega \cdot t + \varphi)} = A \cdot e^{j\varphi} \cdot e^{j\omega \cdot t} \\ &= A \cdot (\cos(\omega \cdot t + \varphi) + j \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)) \end{aligned}$$

aufgefasst werden

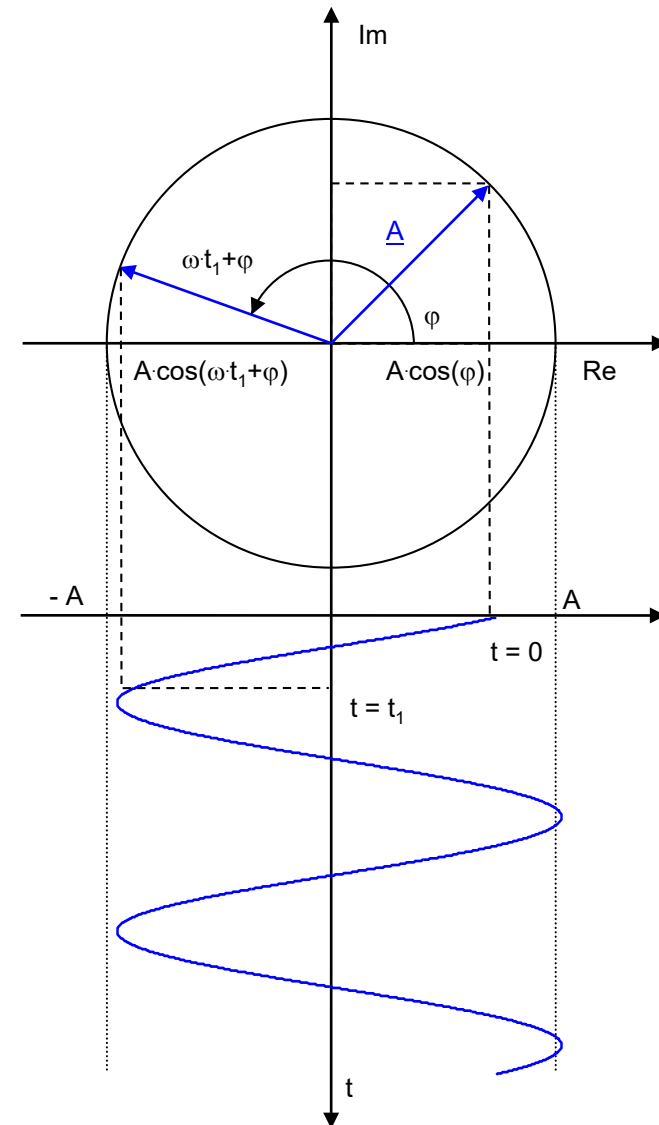


Zeitkontinuierliche Signale

Einschwingvorgänge – Harmonische Funktionen

- Mathematische Darstellung kann durch einen Zeiger der Länge A verdeutlicht werden, der in der komplexen Ebene um den Koordinatenursprung rotiert
- Zeit für eine volle Umdrehung ist die Periodendauer T_0 , eigentlich interessierende Größe ist die Projektion des Zeigers auf die reelle Achse
- Komplexe Amplitude \underline{A} kennzeichnet das Verhalten für $t = 0$

$$z(0) = A \cdot e^{j\varphi} = A \cdot \cos(\varphi) + j \cdot A \cdot \sin(\varphi) = \underline{A}$$



Zeitkontinuierliche Signale

Einschwingvorgänge – Harmonische Funktionen

- Darstellung komplexer Zeiger wird mit Applikation Komplexe Exponentialfunktion auf Systemtheorie Online verdeutlicht

- Zwei Arten der Darstellung

- Realteil einer komplexen Funktion

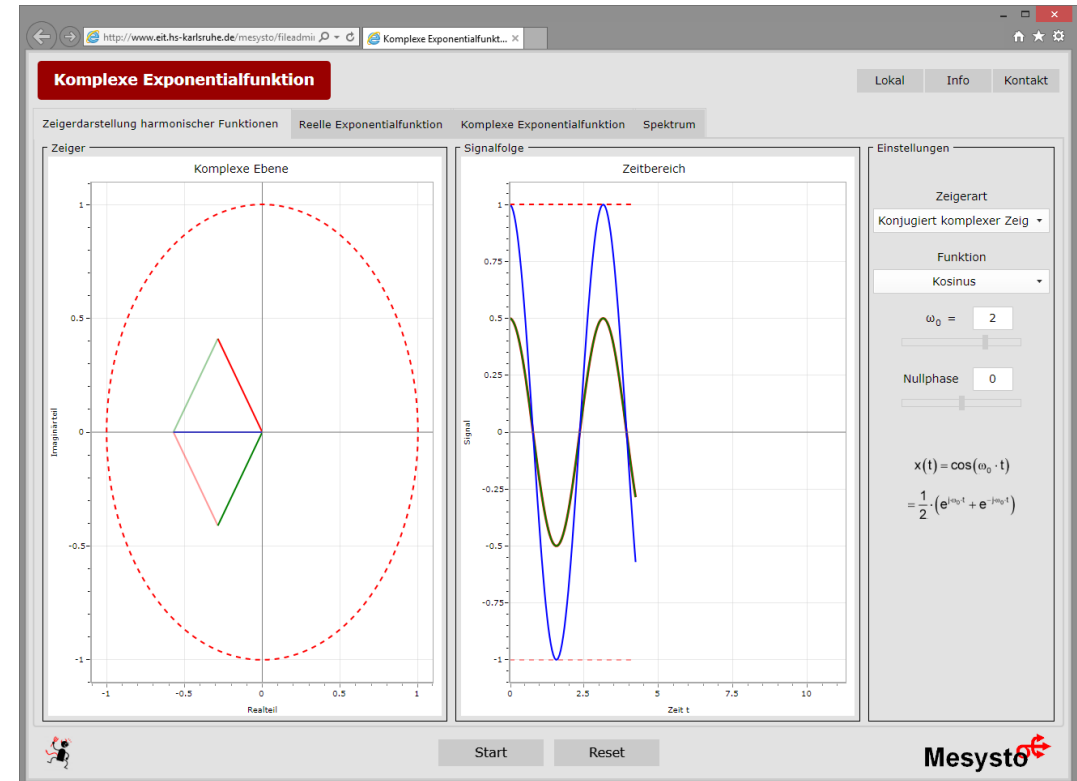
$$x(t) = \operatorname{Re}(A \cdot e^{j\varphi} \cdot e^{j\omega t})$$

- Darstellung mit zwei konjugiert komplexen Zeigern

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (A \cdot e^{j\varphi} \cdot e^{j\omega t} + A \cdot e^{-j\varphi} \cdot e^{-j\omega t})$$

- Darstellung als Zeiger und als Zeitfunktion



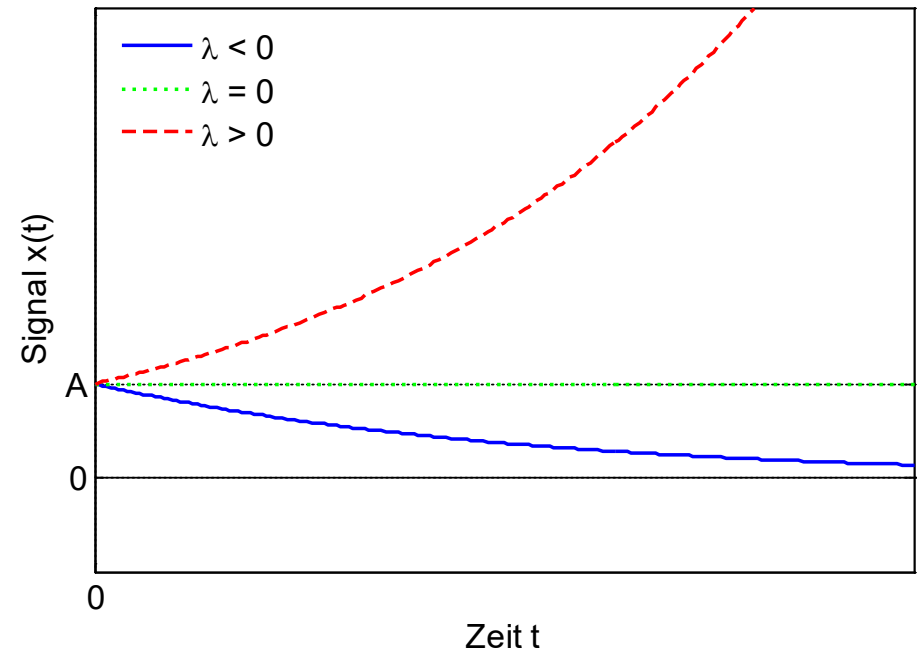
Zeitkontinuierliche Signale

Einschwingvorgänge – Exponentialfunktionen

- Exponentialfunktion ist für die Beschreibung des Einschwingverhaltens wesentlich

$$x(t) = A \cdot e^{\lambda \cdot t} \cdot \sigma(t)$$

- Zeitverhalten der Exponentialfunktion für unterschiedliche reelle Parameter λ und $t > 0$
- Exponentialfunktion beginnt für alle Parameter λ an der Stelle $x(t = 0) = A$
- $\lambda > 0$: Exponentialfunktion steigt
- $\lambda < 0$: Exponentialfunktion nähert sich $x = 0$
- $\lambda = 0$: Exponentialfunktion bleibt konstant



Zeitkontinuierliche Signale

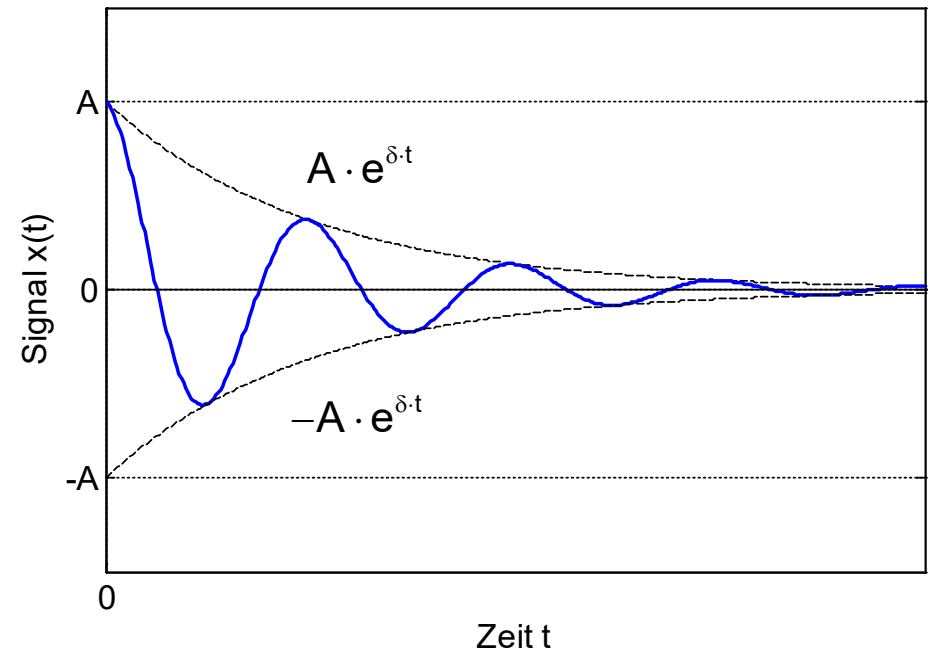
Einschwingvorgänge – Exponentialfunktionen

- Außer reellen und imaginären Argumenten können bei Exponentialfunktionen auch komplexe Argumente λ auftreten
- In diesem Fall kann die Exponentialfunktion in zwei Faktoren zerlegt werden

$$e^{\lambda \cdot t} = e^{(\delta + j\omega) \cdot t} = e^{\delta \cdot t} \cdot e^{j\omega \cdot t}$$

- Beschreibung von harmonischen Schwingungen veränderlicher Amplitude

$$\begin{aligned} x(t) &= A \cdot e^{\delta \cdot t} \cdot \cos(\omega \cdot t) \cdot \sigma(t) \\ &= \frac{1}{2} \cdot A \cdot e^{\delta \cdot t} \cdot (e^{j\omega \cdot t} + e^{-j\omega \cdot t}) \cdot \sigma(t) \\ &= \frac{1}{2} \cdot A \cdot (e^{(\delta + j\omega) \cdot t} + e^{(\delta - j\omega) \cdot t}) \cdot \sigma(t) \end{aligned}$$



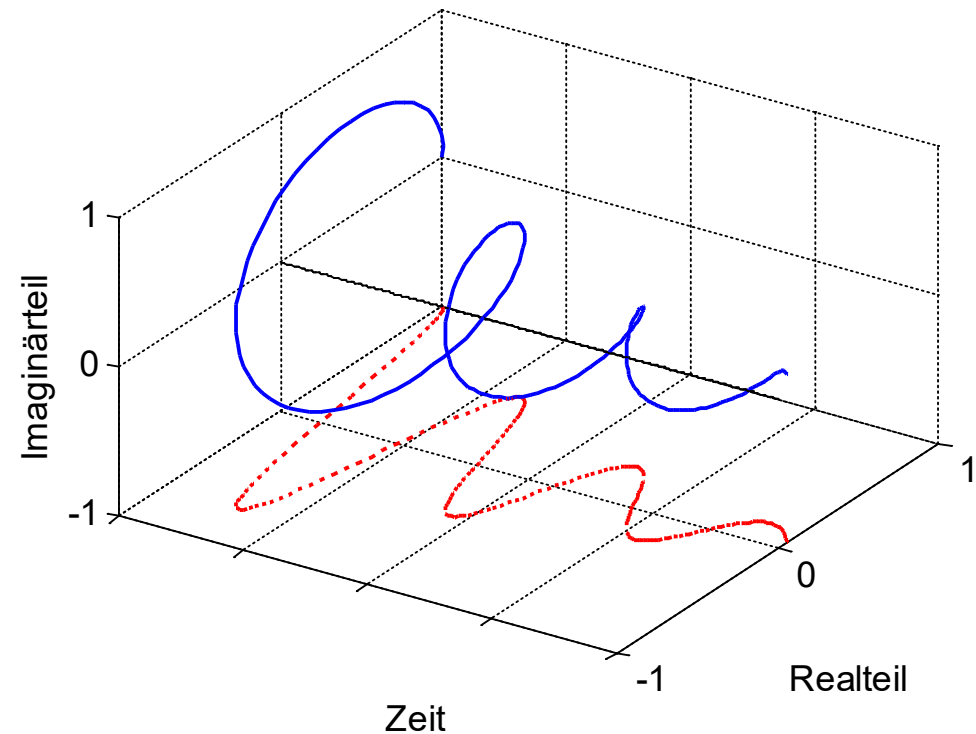
Zeitkontinuierliche Signale

Einschwingvorgänge – Exponentialfunktionen

- Bild zeigt eine räumliche Darstellung der komplexen Exponentialfunktion und die Projektion der Funktion auf die Realteil-Zeit-Ebene
- Projektion der komplexen Exponentialfunktion auf die Realteil-Zeit-Ebene ergibt die abklingende harmonische Schwingung

$$x(t) = A \cdot e^{\delta \cdot t} \cdot \cos(\omega \cdot t) \cdot \sigma(t)$$

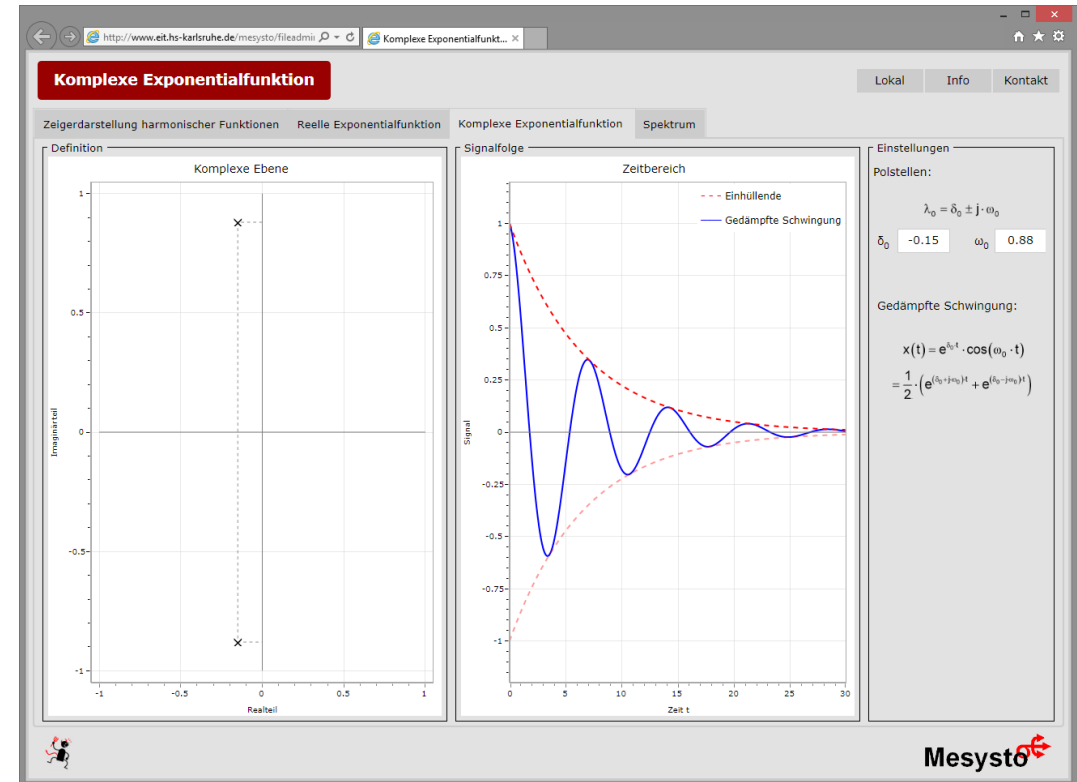
- Je nach Lage des Wertes $\lambda = \delta + j \cdot \omega$ in der komplexen Ebene ergeben sich charakteristische Verhalten der komplexen Exponentialfunktion



Zeitkontinuierliche Signale

Einschwingvorgänge – Exponentialfunktionen

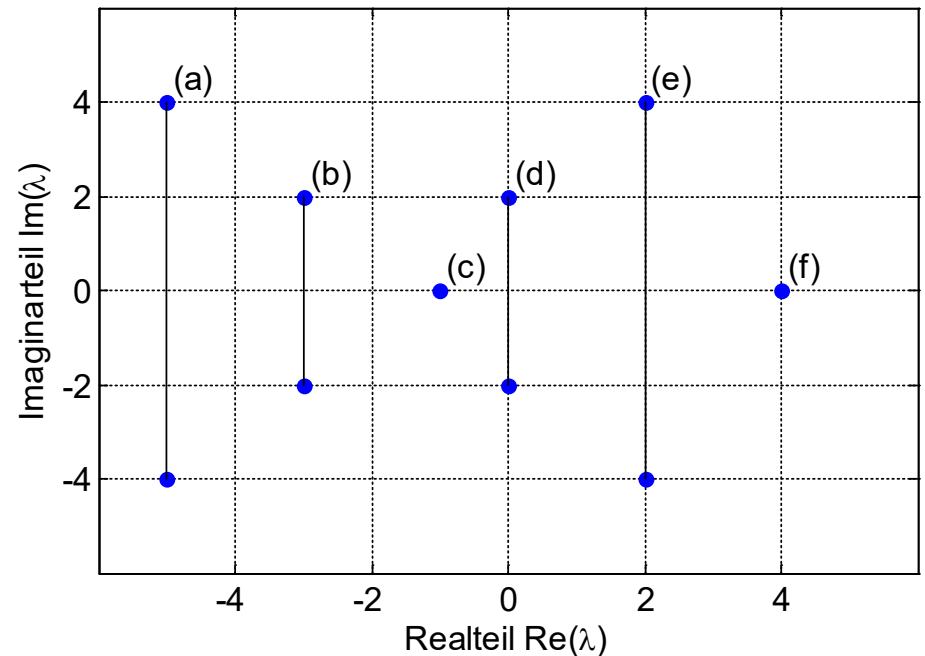
- Zusammenhang zwischen dem Wert $\lambda = \delta_0 + j \cdot \omega_0$ und der Schwingung wird mit Applikation Komplexe Exponentialfunktion auf Systemtheorie Online verdeutlicht
- Parameter λ_0 wird durch Klicken in die komplexe Ebene festgelegt und ggf. durch einen konjugiert komplexen Wert ergänzt
- Schwingung und Einhüllende der Schwingung werden berechnet und dargestellt



Zeitkontinuierliche Signale

Übungsaufgabe: Einschwingvorgänge – Exponentialfunktionen

- Skizzieren Sie für die in der komplexen Ebene dargestellten Koeffizienten λ die Exponentialfunktionen als Funktion der Zeit
- Geben Sie für alle komplexen Parameter an, mit welcher Frequenz die entsprechende harmonische Schwingung schwingt und wie sich die Amplitude mit der Zeit ändert



Zeitkontinuierliche Signale

Übungsaufgabe: Einschwingvorgänge – Exponentialfunktionen

- Stellen Sie die Signale $x_i(t)$ als Summe komplexer Exponentialfunktionen der Form

$$x(t) = \sum A_i \cdot e^{\lambda_i \cdot t}$$

dar.

$$x_1(t) = 2 \cdot e^{-0.5 \cdot t} \cdot \cos(4 \cdot \pi \cdot t)$$

$$x_2(t) = e^{0.1 \cdot t} \cdot \sin(\pi \cdot t)$$

$$x_3(t) = e^{-t}$$

- Skizzieren sie Lage der Koeffizienten λ_i in der komplexen Ebene

