Hochschule Karlsruhe
Technik und Wirtschaft
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES
Näher dran.

EIT Fakultät für Elektro- und Informationstechnik

Systemtheorie

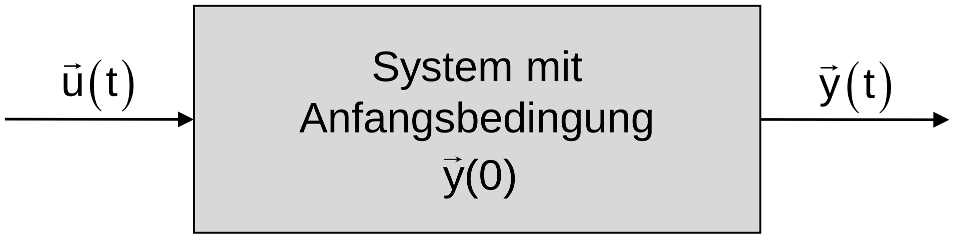
Vorlesung 5: Eigenschaften zeitkontinuierlicher Systeme

Fakultät für Elektro- und Informationstechnik, Manfred Strohrmann

Zeitkontinuierliche Systeme im Zeitbereich

Einführung

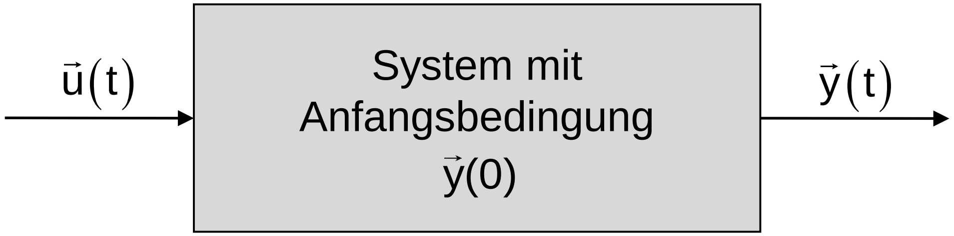
- Systemtheorie beschäftigt sich mit der Analyse und Synthese von Systemen
- Sie erlaubt das Systemverhalten zu prognostizieren, Stabilitätsaussagen zu treffen und die Kopplung verschiedener Teilsysteme zu beschreiben
- Ein System kann ein oder mehrere Ein- und Ausgangssignale aufweisen, die in dem Eingangsvektor $\vec{u}$ bzw. dem Ausgangsvektor $\vec{y}$ zusammengefasst sind
- Eingangssignale $\vec{u}(t)$ werden von dem System nicht beeinflusst, sie existieren auch ohne das System und das System hat keine Rückwirkung auf sie, Beispiel ideale Spannungsquelle
- Dynamische Systeme verfügen über Energiespeicher



Zeitkontinuierliche Systeme im Zeitbereich

Einführung

- Anregung durch die Eingangssignale $\vec{u}(t)$ führt zu einer Änderung der in dem System gespeicherten Energie
- In der Systemtheorie wird davon gesprochen, dass damit der Zustand des Systems geändert wird, Beispiel ist die in einem Kondensator gespeicherte elektrische Energie oder der Zustand des Kondensators
- Ausgangssignale $\vec{y}(t)$ ergeben sich aus dem aktuellen Systemzustand und den aktuellen Eingangssignalen
- Ausgangssignal wird auch Reaktion des Systems oder Systemantwort genannt
- Viele Systeme lassen sich mit linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten beschreiben, Diskussion einiger Beispiele



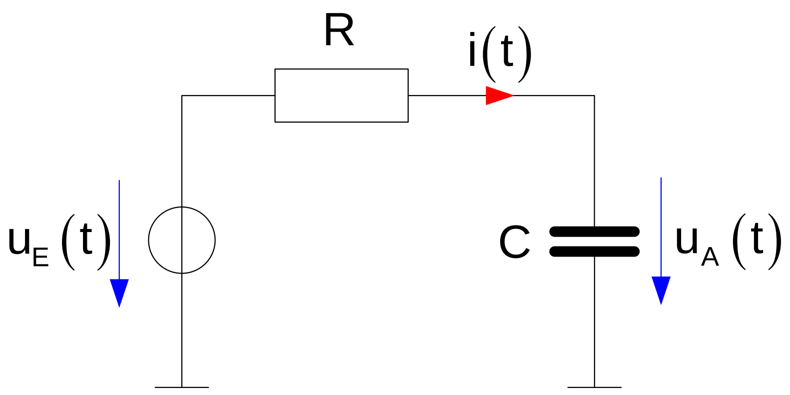
Beschreibung von Systemen mit Differentialgleichungen – Beispiel RC-Glied

- Beschreibung eines einfachen Netzwerkes bestehend aus einer Spannungsquelle u_E, einem Widerstand R und einer Kapazität C
- Beschreibung linearer elektrischer Systeme erfolgt über Bauelemente-Gleichungen für die beteiligten Bauelemente R, L und C, ideale Quellen und Bilanzgleichungen
- Maschengleichung

$$\sum_{n=1}^{N} u_n(t) = 0$$

- Knotengleichung

$$\sum_{m=1}^{M} i_m(t) = 0$$



Zeitkontinuierliche Systeme im Zeitbereich

Beschreibung von Systemen mit Differentialgleichungen – Beispiel RC-Glied

Bauelement	Bauelemente-Gleichungen	
Widerstand	$u_R(t) = R \cdot i_R(t)$	$i_R(t) = \frac{1}{R} \cdot u_R(t)$
Kapazität	$u_C(t) = \frac{1}{C} \cdot \int_{-\infty}^{t} i_C(\tau)\, d\tau$	$i_C(t) = C \cdot \frac{du_C}{dt}$
Induktivität	$u_L(t) = L \cdot \frac{di_L}{dt}$	$i_L(t) = \frac{1}{L} \cdot \int_{-\infty}^{t} u_L(\tau)\, d\tau$

Zeitkontinuierliche Systeme im Zeitbereich

Beschreibung von Systemen mit Differentialgleichungen – Beispiel RC-Glied

- Maschengleichung und Bauelemente-Gleichung

$$u_E(t) - u_R(t) - u_A(t) = u_E(t) - i_R(t) \cdot R - u_A(t) = 0$$

- Substitution des Strome $i_R(t)$

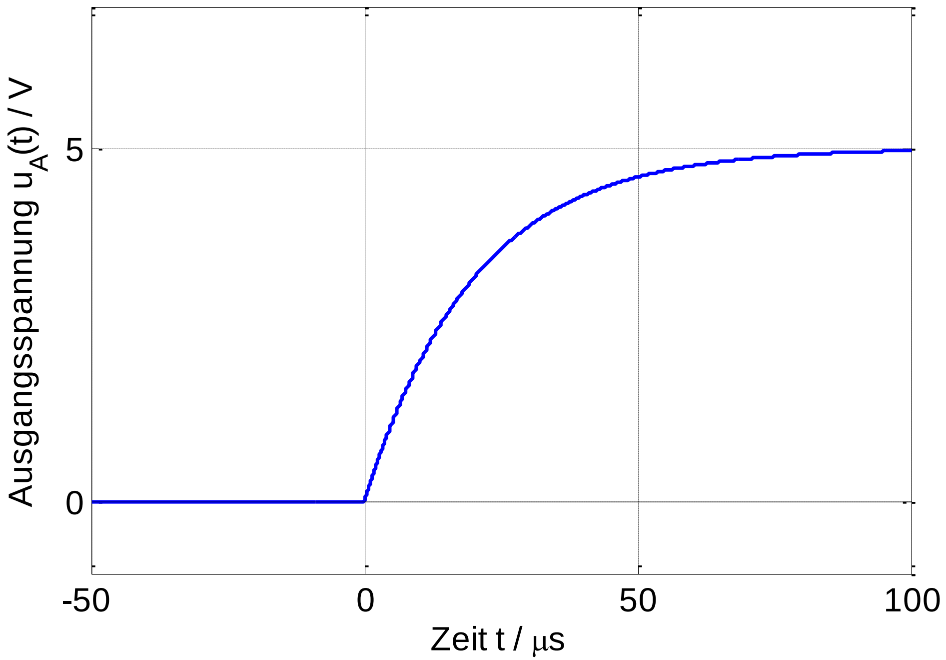
$$i_R(t) = i_C(t) = C \cdot \frac{du_A}{dt}$$

- Differentialgleichung zur Beschreibung des RC-Netzwerkes

$$u_E(t) = R \cdot C \cdot \frac{du_A(t)}{dt} + u_A(t)$$

- Lösung für Spannungssprung am Eingang

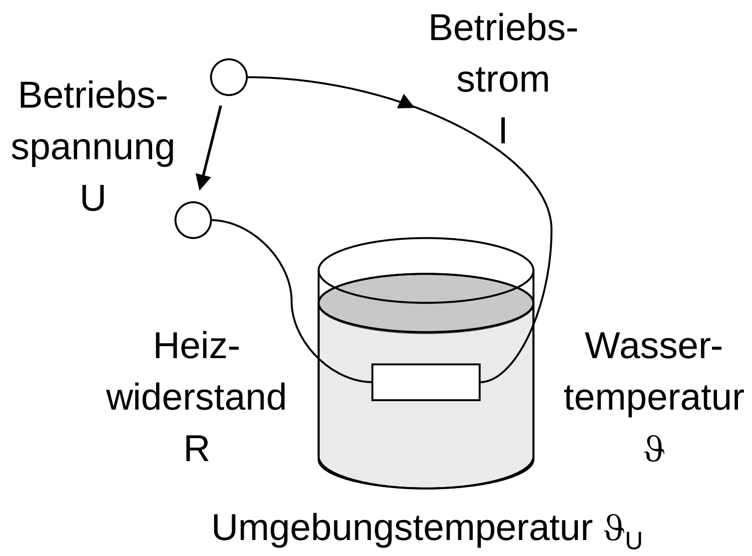
$$u_A(t) = U_{E0} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{R \cdot C} \cdot t}\right) \cdot \sigma(t)$$



Zeitkontinuierliche Systeme im Zeitbereich

Beschreibung von Systemen mit Differentialgleichungen – Beispiel Aufheizvorgang

- Behälter mit Volumen V und Oberfläche A ist mit Wasser gefüllt
- Wärmeaustausch mit der Umgebung findet nur als Wärmeleitung über die Oberfläche A statt
- Bis zu dem Zeitpunkt t = 0 entspricht die Wassertemperatur $\vartheta(0)$ der Umgebungs-temperatur ϑ_U
- Zum Zeitpunkt t = 0 wird ein Tauchsieder in das Wasser getaucht, der eine konstante elektrische Leistung p_{EL} umsetzt
- Temperatur des Wassers wird sich solange erhöhen, bis sich ein Gleichgewicht zwischen der zugeführten Leistung p_{EL} und des über die Fläche A abgeführten Wärmestroms p_A einstellt



Zeitkontinuierliche Systeme im Zeitbereich

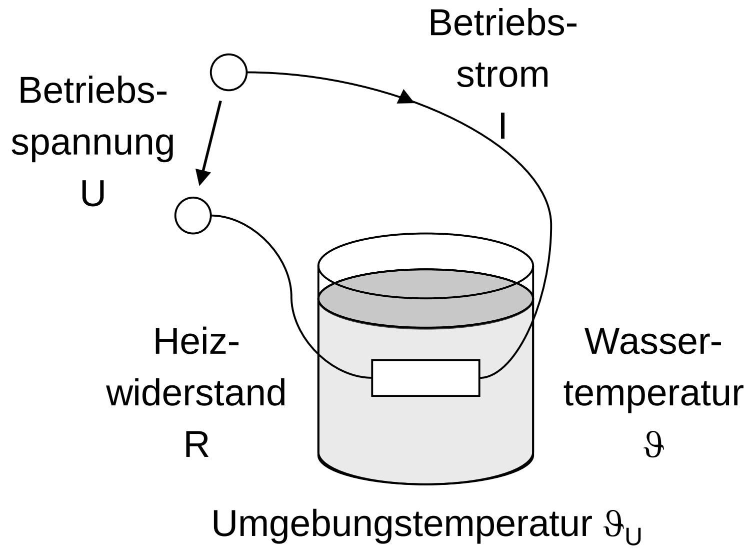
Beschreibung von Systemen mit Differentialgleichungen – Beispiel Aufheizvorgang

- Temperaturdifferenz $\Delta\vartheta$ an einer Fläche A mit der Wärmeübergangszahl α führt zu einem Wärmestrom p_A

$$\Delta\vartheta(t) = \vartheta(t) - \vartheta_U = \frac{1}{\alpha \cdot A} \cdot p_A(t)$$

- Beschreibung ist vergleichbar zum Ohmschen Gesetz, elektrische Spannung entspricht der Temperaturdifferenz $\Delta\vartheta$, elektrischer Strom entspricht dem Wärmestrom p_A
- Definition des thermischen Widerstandes R_{TH}

$$R_{TH} = \frac{\Delta\vartheta(t)}{p_A(t)} = \frac{1}{\alpha \cdot A}$$



Zeitkontinuierliche Systeme im Zeitbereich

Beschreibung von Systemen mit Differentialgleichungen – Beispiel Aufheizvorgang

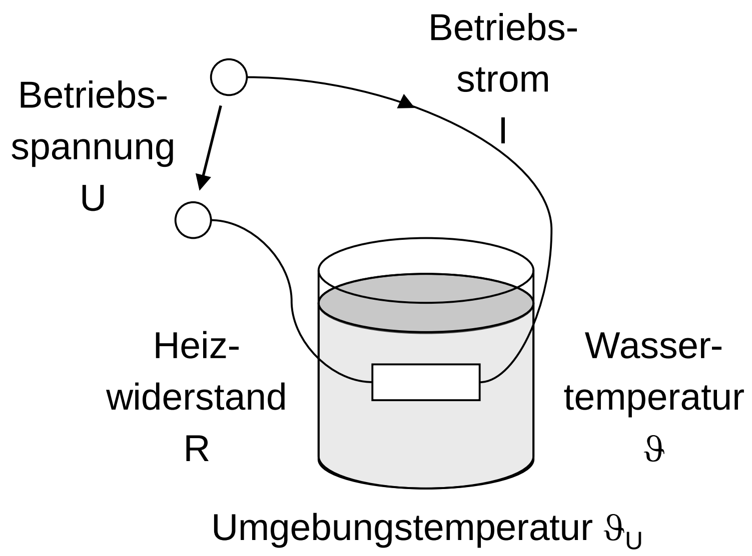
- Wärmekapazität C_{th} ist definiert als der Quotient aus zugeführter Energie dE_C und der damit verbundenen Temperaturänderung $d\vartheta$

$$C_{TH} = \frac{dE_C(t)}{d\vartheta(t)}$$

- Darstellung in Integralform führt zur Temperaturänderung $\Delta\vartheta$ des Wassers

$$\Delta\vartheta(t) = \frac{1}{C_{TH}} \cdot \int_{-\infty}^{t} p_C(\tau)\ d\tau$$

- Wissen der elektrischen Schaltungstechnik kann auf thermische Anwendungen übertragen werden



Zeitkontinuierliche Systeme im Zeitbereich

Beschreibung von Systemen mit Differentialgleichungen – Beispiel Aufheizvorgang

Bauelement	Bauelemente-Gleichungen	
Wärmewiderstand	$\Delta\vartheta(t) = R_{TH} \cdot p_A(t) = \dfrac{1}{\alpha \cdot A} \cdot p_A(t)$	$p_A(t) = \alpha \cdot A \cdot \Delta\vartheta(t)$
Wärmekapazität	$\Delta\vartheta(t) = \dfrac{1}{C_{TH}} \cdot \int_{-\infty}^{t} p_C(\tau)\, d\tau$	$p_C(t) = C_{TH} \cdot \dfrac{d\Delta\vartheta}{dt}$

Zeitkontinuierliche Systeme im Zeitbereich

Beschreibung von Systemen mit Differentialgleichungen – Beispiel Aufheizvorgang

- Für die Bilanzen gelten sinngemäß die gleichen Beziehungen wie bei den elektrischen Größen
- Maschenregel der Temperaturdifferenzen lautet

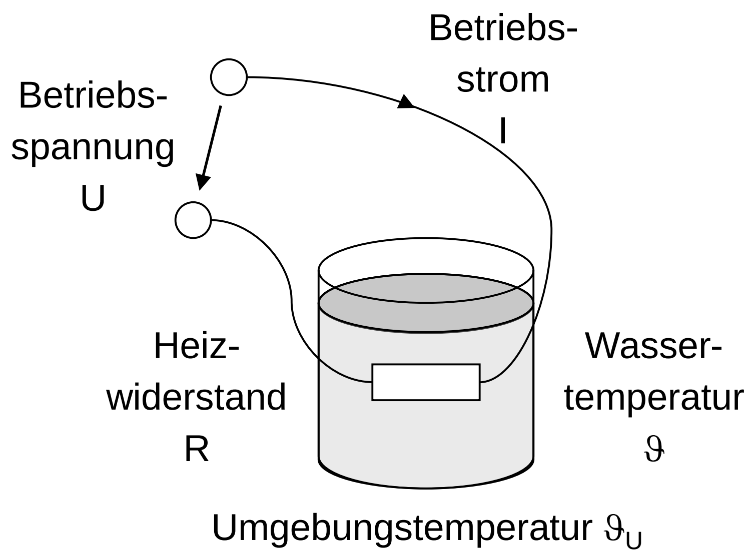
$$\sum_{n=1}^{N} \Delta\vartheta_n(t) = 0$$

- Knotengleichung entspricht die Leistungsbilanz

$$\sum_{m=1}^{M} p_m(t) = 0$$

- Verknüpfung der elektrischen und thermischen Größen über eine Leistungsbilanz erstellt

$$p_C(t) = p_{EL}(t) - p_A(t)$$



Zeitkontinuierliche Systeme im Zeitbereich

Beschreibung von Systemen mit Differentialgleichungen – Beispiel Aufheizvorgang

- Einsetzen der Bauelement-Gleichungen ergibt die Differentialgleichung

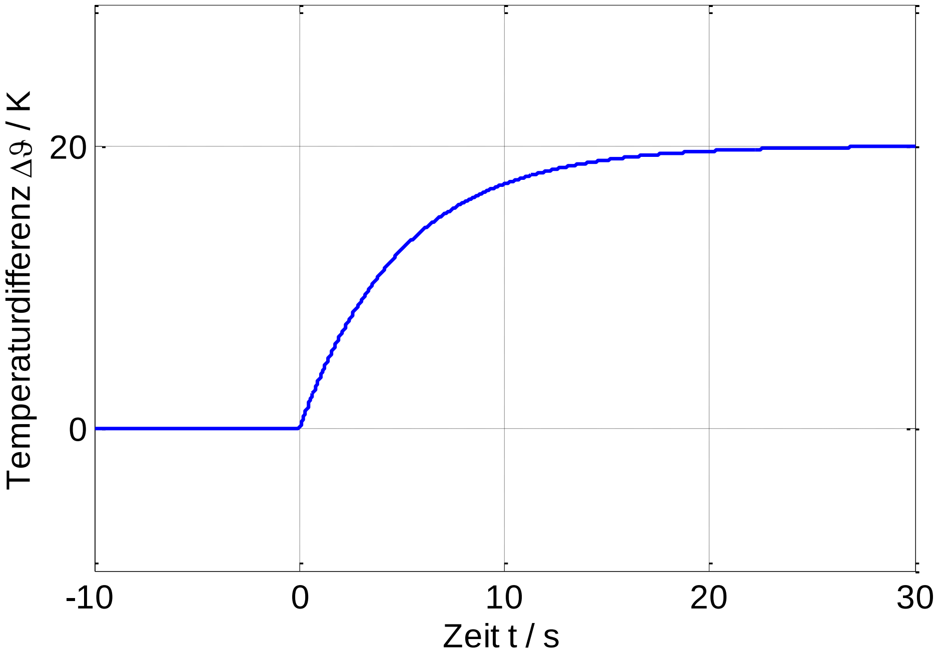
$$C_{TH} \cdot \frac{d\Delta\vartheta(t)}{dt} = p_{EL}(t) - \alpha \cdot A \cdot \Delta\vartheta(t)$$

bzw.

$$\frac{C_{TH}}{\alpha \cdot A} \cdot \frac{d\Delta\vartheta(t)}{dt} + \Delta\vartheta(t) = \frac{p_{EL}(t)}{\alpha \cdot A}$$

- Differentialgleichung erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten wie bei RC-Netzwerk
- Lösung für Spannungssprung am Eingang

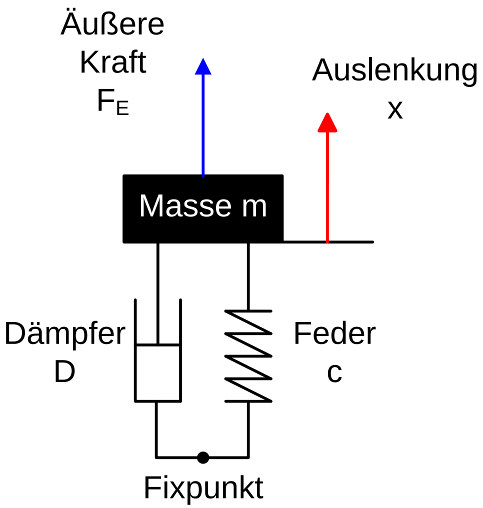
$$\Delta\vartheta(t) = \vartheta_0 \cdot \left(1 - e^{\frac{-t}{T}}\right) = \frac{p_{EL}}{\alpha \cdot A} \cdot \left(1 - e^{-\frac{\alpha \cdot A}{C_{TH}} \cdot t}\right)$$

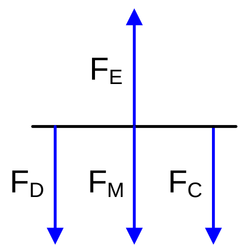


Zeitkontinuierliche Systeme im Zeitbereich

Beschreibung von Systemen mit Differentialgleichungen – Feder-Masse-System

- Beispiel Feder-Masse-Dämpfer-System
- Äußere Kraft F_E greift an einem Körper der Masse m an und bewegt den Körper, der Bewegung stehen die Trägheits-, Dämpfungs- und Rückstellkraft der Feder entgegen
- Berechnung der Auslenkung x bei einer sprungförmig aufgebrachten Kraft F_E
- Wie bei dem elektrischen System lassen sich die mechanischen Bauelemente isoliert beschreiben
- Bilanzen werden zur Verknüpfung der unterschiedlichen Größen verwendet





Zeitkontinuierliche Systeme im Zeitbereich

Beschreibung von Systemen mit Differentialgleichungen – Feder-Masse-System

Bauelement	Bauelemente-Gleichung	
Feder mit Federkonstante c	$F_C(t) = c \cdot \int_{-\infty}^{t} v(\tau)\, d\tau = c \cdot x(t)$	$v(t) = \frac{1}{c} \cdot \frac{dF_C}{dt}$
Masse m	$F_M(t) = m \cdot a(t) = m \cdot \frac{dv}{dt}$	$v(t) = \frac{1}{m} \cdot \int_{-\infty}^{t} F_M(\tau)\, d\tau$
Viskose Reibung / Dämpfer D	$F_D(t) = D \cdot v(t) = D \cdot \frac{dx}{dt}$	$v(t) = \frac{1}{D} \cdot F_D(t)$
Gleitreibung	$F_G(t) = \mu \cdot F_N(t) \cdot \mathrm{sgn}(v(t))$	keine Invertierung möglich

Zeitkontinuierliche Systeme im Zeitbereich

Beschreibung von Systemen mit Differentialgleichungen – Feder-Masse-System

- Maschenregel entspricht die Kräftesumme

$$\sum_{n=1}^{N} F_n(t) = 0$$

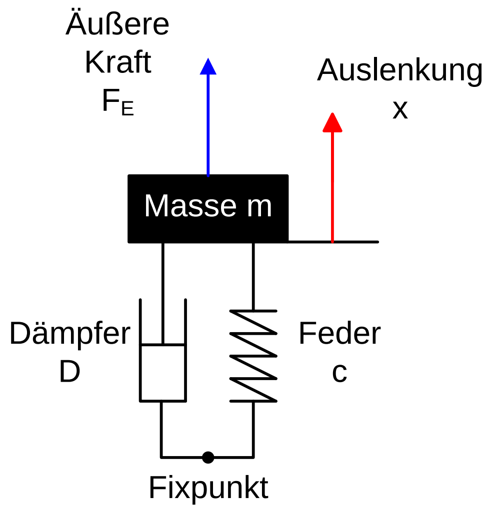
- Masse, Feder und Dämpfer sind starr miteinander gekoppelt, ihre Auslenkung x für Masse, Feder und Dämpfer ist damit identisch

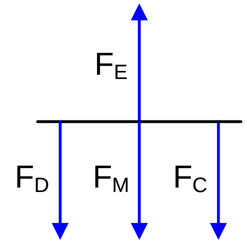
- Kräftebilanz ergibt unter Berücksichtigung der unterschiedlichen Kraftrichtungen

$$\begin{aligned} 0 &= F_E(t) - F_M(t) - F_D(t) - F_C(t) \\ &= F_E(t) - m \cdot a(t) - D \cdot v(t) - c \cdot x(t) \end{aligned}$$

- Darstellung als Differentialgleichung

$$F_E(t) = m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + D \cdot \frac{dx}{dt} + c \cdot x(t)$$





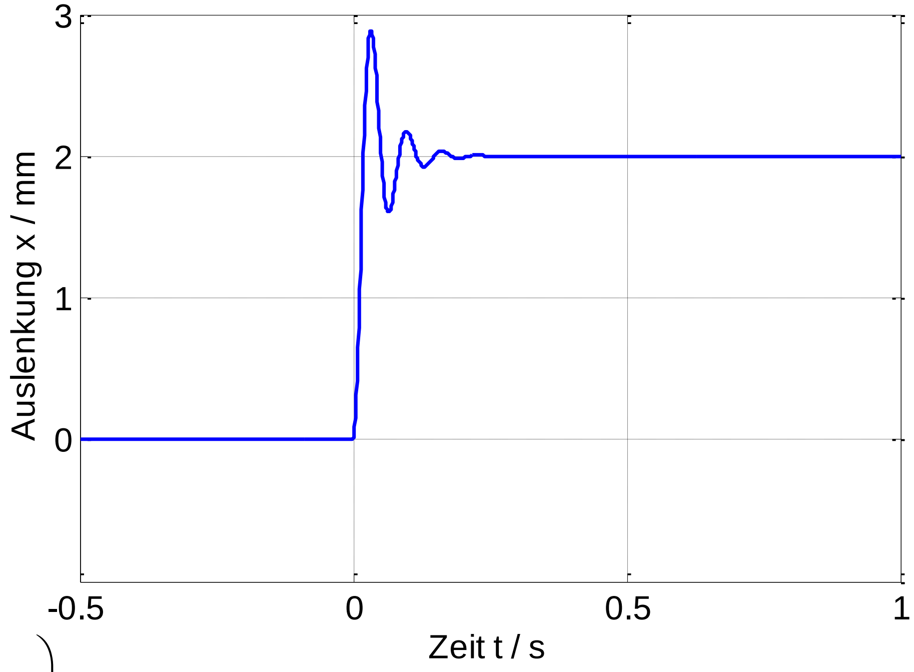
Zeitkontinuierliche Systeme im Zeitbereich

Beschreibung von Systemen mit Differentialgleichungen – Feder-Masse-System

- Darstellung als Differentialgleichung

$$F_E(t) = m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + D \cdot \frac{dx}{dt} + c \cdot x(t)$$

- Lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten, Ordnung der Differentialgleichung entspricht der höchsten Ableitung, N = 2
- Lösung der Differentialgleichung für einen Kraftsprung, System ist zum Zeitpunkt t = 0 in Ruhe und in der Position x = 0



$$x(t) = \frac{F_0}{c} \cdot \left(1 + \frac{e^{-\frac{D}{2 \cdot m} \cdot t}}{\sqrt{1 - \left(\frac{D}{2 \cdot \sqrt{m \cdot c}} \right)^2}} \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{c}{m} - \left(\frac{D}{2 \cdot m} \right)^2} \cdot t - \varphi \right) \right) \cdot \sigma(t)$$

Zeitkontinuierliche Systeme im Zeitbereich

Eigenschaften von Systemen – Überblick

- Beispiele für unterschiedliche Systeme behandelt
- Mathematische Modellierung führt bei diesen Beispielen zu linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten
- Für die effiziente Beschreibung von Systemen ist es wichtig, grundlegende Eigenschaften von Systemen erkennen und diskutieren zu können
- Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten beschreiben lineare, zeitinvariante Systeme, deshalb werden die zugehörigen Systemeigenschaften Linearität und Zeitinvarianz diskutiert
- LTI-System: Linear Time Invariant System
- Kausalität von System ist wesentliche Voraussetzung für die Realisierbarkeit von Systemen
- Insbesondere bei geregelten System spielt die Stabilität eine entscheidende Rolle, sie wird anhand physikalischer Modelle eingeführt

Zeitkontinuierliche Systeme im Zeitbereich

Eigenschaften von Systemen – Linearität

- Für den Linearitätsnachweis eines Systems müssen die Systemantworten $y_1(t)$ und $y_2(t)$ auf die linear unabhängigen Eingangssignale $u_1(t)$ und $u_2(t)$ bekannt sein
- Ein System ist linear, wenn es auf eine Linearkombination von Eingangssignalen

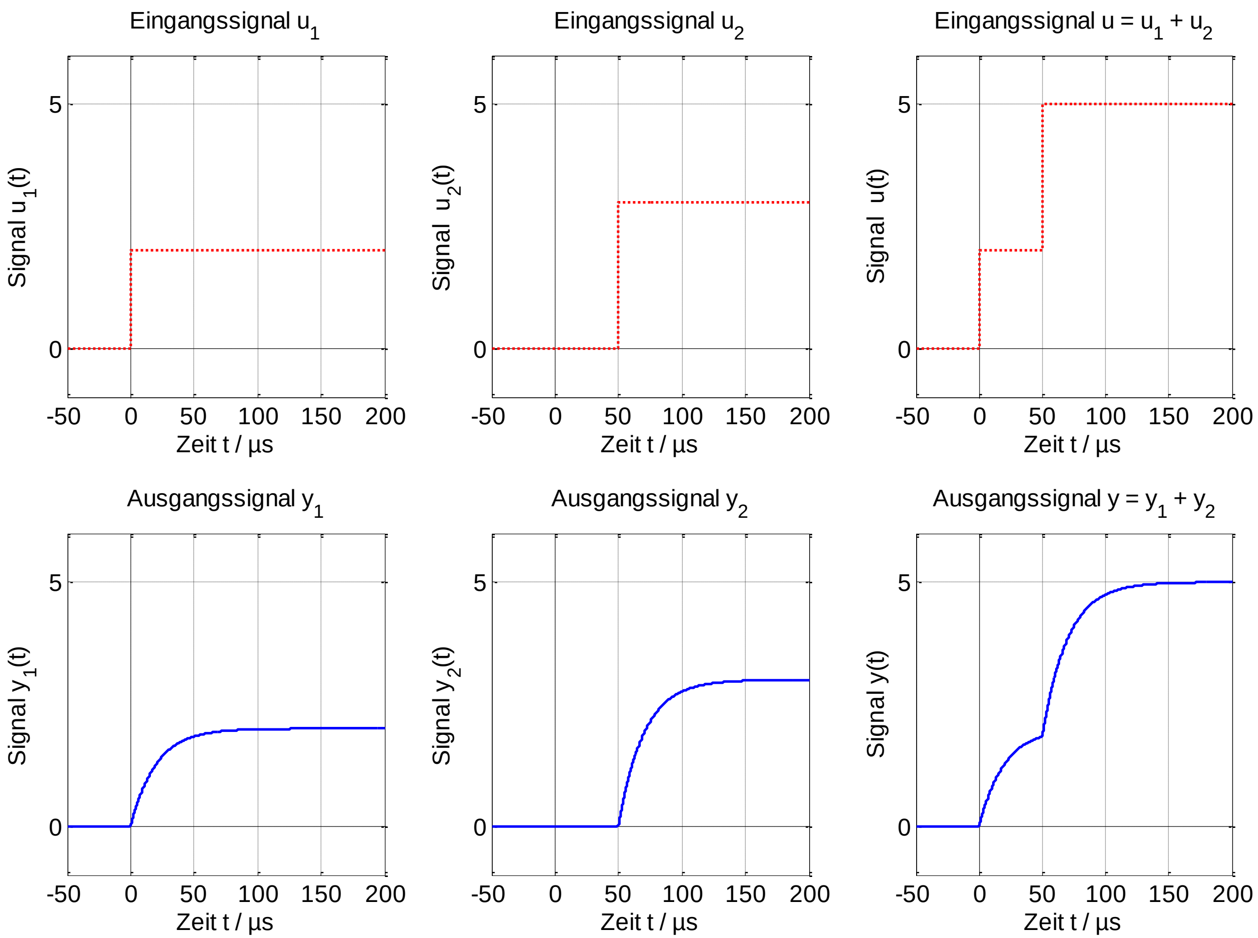
  $$u(t) = \nu_1 \cdot u_1(t) + \nu_2 \cdot u_2(t)$$

  mit derselben Linearkombination der entsprechenden Kombination von Ausgangssignalen reagiert

  $$y(t) = \nu_1 \cdot y_1(t) + \nu_2 \cdot y_2(t)$$

- Nachweis der Linearität erfolgt über Einsetzen der Gleichungen in die Differentialgleichung
- Bei linearen Systemen kann das Superpositionsprinzip angewendet werden

Eigenschaften von Systemen – Linearität



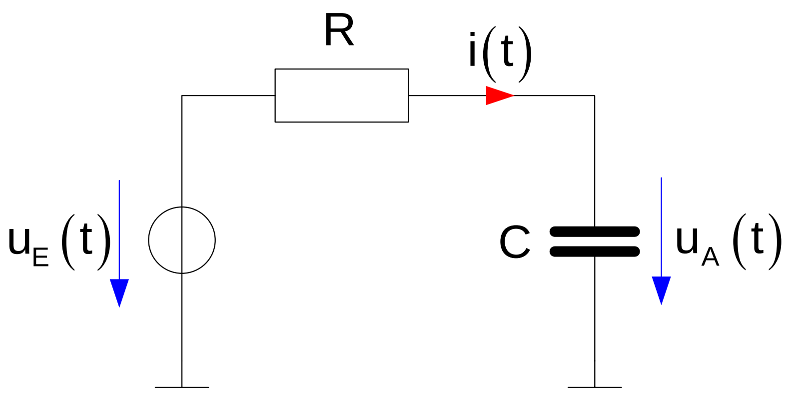
Zeitkontinuierliche Systeme im Zeitbereich

Beispiel: Eigenschaften von Systemen – Linearität

- RC-Glied wird über die Differentialgleichung

$$u_E(t) = R \cdot C \cdot \frac{du_A(t)}{dt} + u_A(t)$$

  beschrieben



- Prüfung des Systems auf Linearität
- Worauf ist die Linearität des Systems zurückzuführen?

Zeitkontinuierliche Systeme im Zeitbereich

Übungsaufgaben: Eigenschaften von Systemen – Linearität

- Ein Spannungsteiler wird über die Gleichung

  $$u_{R2}(t) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot u_0(t)$$

  beschrieben. Handelt es sich um ein lineares System?

- Der Zusammenhang zwischen Spannung und Strom an einer Induktivität wird über die Gleichung

  $$u_L(t) = L \cdot \frac{di_L}{dt}$$

  beschrieben. Handelt es sich bei der Induktivität um ein lineares System?

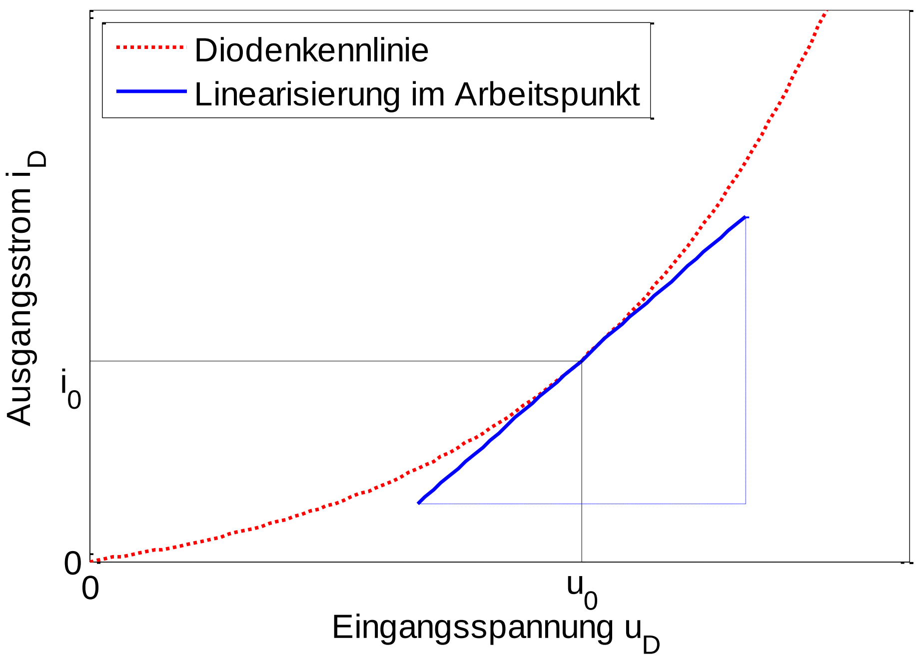
Zeitkontinuierliche Systeme im Zeitbereich

Eigenschaften von Systemen – Linearisierung im Arbeitspunkt

- Strom durch eine Diode wird über die Schottkly-Gleichung beschrieben

$$i_D(t) = I_s \cdot \left(e^{\frac{u_D(t)}{n \cdot U_T}} - 1 \right)$$

- System kein lineares System
- Nichtlineares Verhalten des Diodenstrom i_D als Funktion der Diodenspannung u_D wird in einem Arbeitspunkt mit der Spannung u_0 und dem Strom i_0 linearisiert werden



Zeitkontinuierliche Systeme im Zeitbereich

Eigenschaften von Systemen – Linearisierung im Arbeitspunkt

- In dem Arbeitspunkt wird durch Ableitung der Shockley-Gleichung die Steigung der Tangente bestimmt

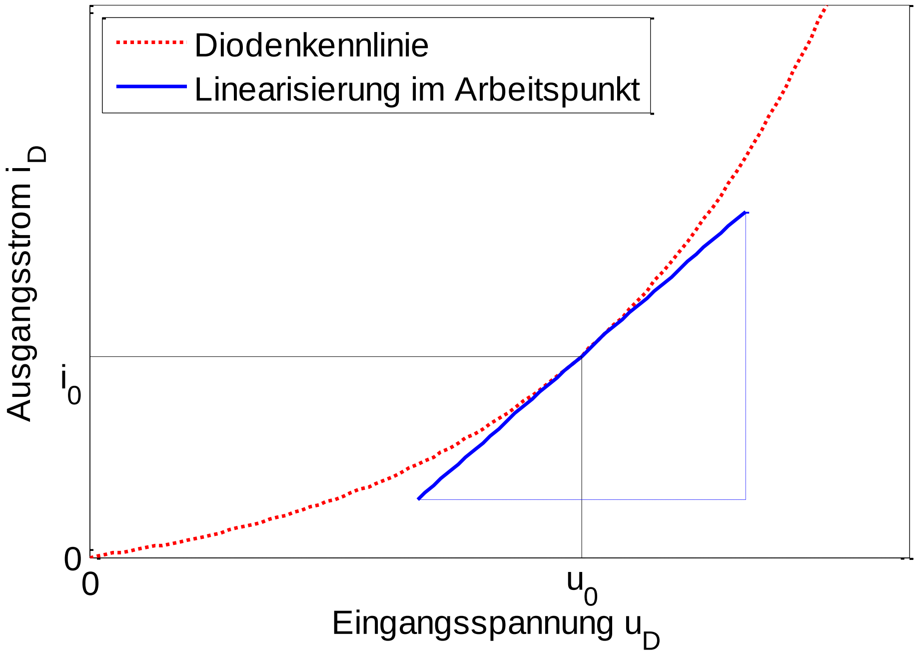
$$m = \left.\frac{di_D}{du_D}\right|_{u_D=u_0} = \left.\frac{I_s}{n \cdot U_T} \cdot e^{\frac{u_D(t)}{n \cdot U_T}}\right|_{u_D=u_0} = \frac{I_s}{n \cdot U_T} \cdot e^{\frac{u_0}{n \cdot U_T}}$$

- Systemverhalten im Arbeitspunkt ergibt sich dann aus der Geradengleichung

$$\Delta i_D = i_D(t) - i_0 = \frac{I_s}{n \cdot U_T} \cdot e^{\frac{u_0}{n \cdot U_T}} \cdot \left(u_D(t) - u_0\right)$$

$$= m \cdot \left(u_D(t) - u_0\right) = m \cdot \Delta u_D(t)$$

- Lineare Näherung für das nichtlineare System Diode im Arbeitspunkt $(u_0|i_0)$, Linearisierung nur für sehr kleine Werte Δu_D ausreichend präzise



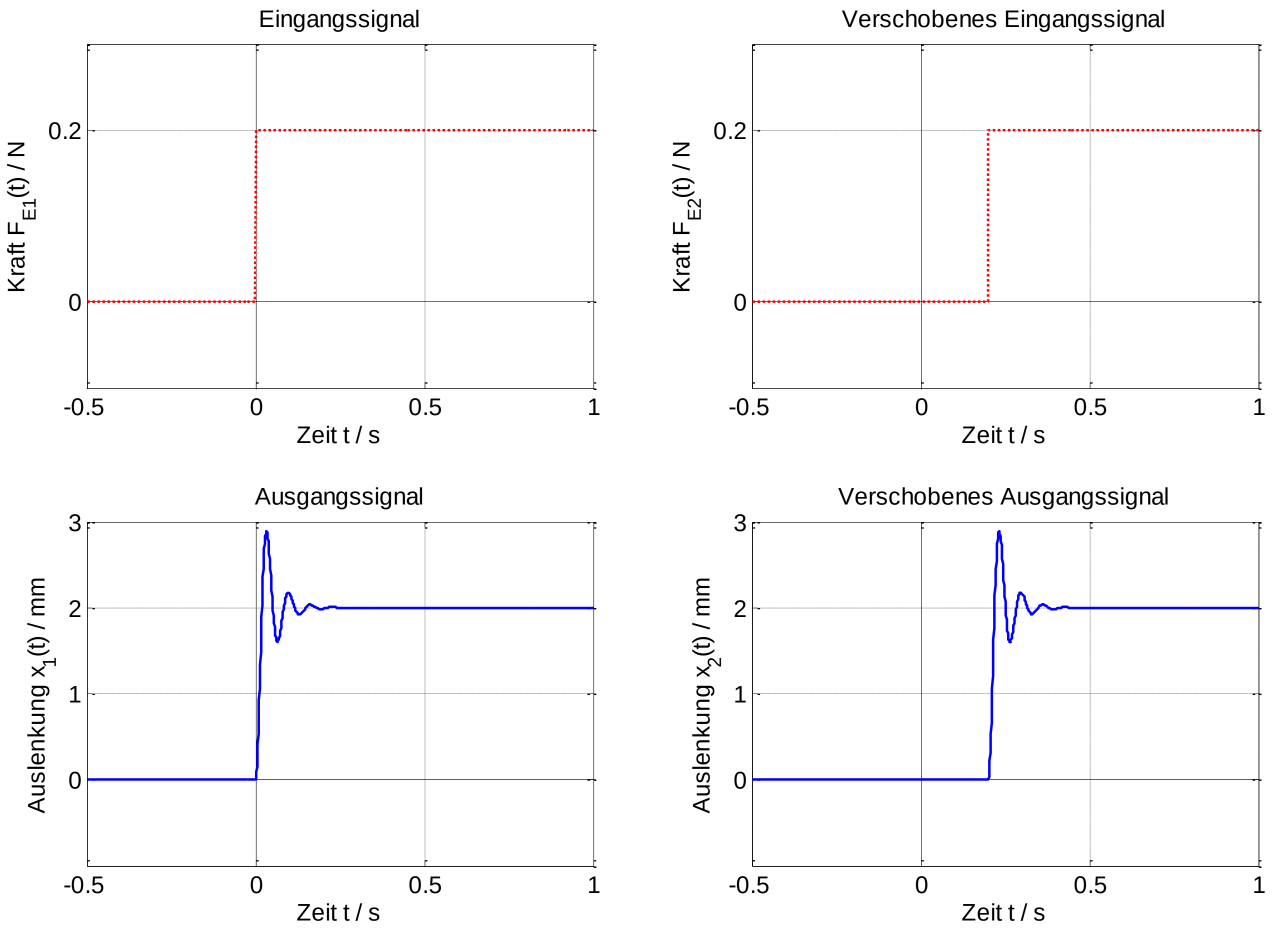
Zeitkontinuierliche Systeme im Zeitbereich

Eigenschaften von Systemen – Zeitinvarianz

- System reagiert auf ein Eingangssignal $x(t)$ mit einer Systemantwort $y(t)$
- Ist das System zeitinvariant, so reagiert das System auf das verzögerte Eingangssignal $u(t - t_0)$ mit dem Ausgangsignal $y(t - t_0)$
- Zeitinvariante Systeme reagieren also unabhängig vom Startzeitpunkt der Beobachtung auf gleiche Eingangssignale mit gleichen Ausgangssignalen
- Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten beschreiben zeitinvariante Systeme, ändern sich die Koeffizienten der Differentialgleichung als Funktion der Zeit t, verändert sich das System mit der Zeit, es ist zeitvariant
- Zeitinvarianz ist oft nur näherungsweise erfüllt ist, wenn Änderungsprozesse viel langsamer sind als die Signaländerungen der Schaltung, wird das System als zeitinvariant betrachtet, Beispiel RLC-Schaltung

Zeitkontinuierliche Systeme im Zeitbereich

Eigenschaften von Systemen – Zeitinvarianz

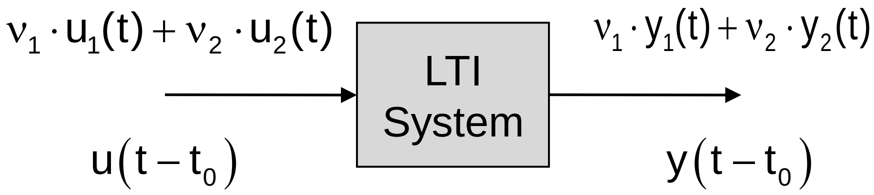


Zeitkontinuierliche Systeme im Zeitbereich

Eigenschaften von Systemen – Lineare, zeitinvariante Systeme

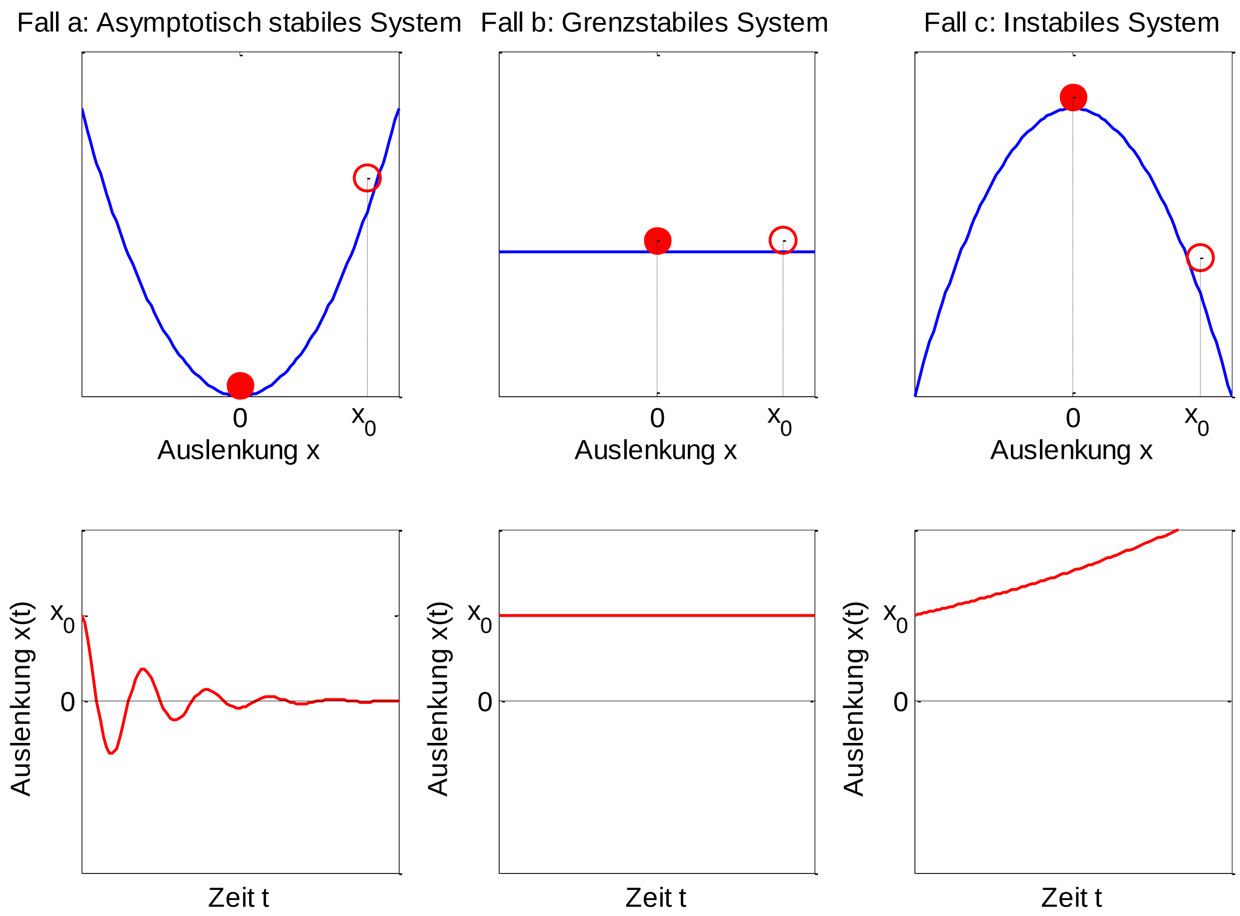
- Systeme, die sowohl
  - linear, als auch
  - zeitinvariant

  sind, werden als LTI-Systeme bezeichnet
- Für LTI-Systeme sind vergleichsweise anschauliche und einfach zu interpretierende Lösungs- und Interpretationsmethoden im Zeit-, Bild- und Frequenzbereich vorhanden
- Darstellungen in diesem Skript beschränken sich bis auf wenige Ausnahmen auf LTI-Systeme
- Systeme, die mit einer linearen Differential-gleichung mit konstanten Koeffizienten beschrieben werden können, erfüllen die Bedingungen nach Linearität und Zeitinvarianz



Zeitkontinuierliche Systeme im Zeitbereich

Eigenschaften von Systemen – Fallbeispiel zur Stabilität



Zeitkontinuierliche Systeme im Zeitbereich

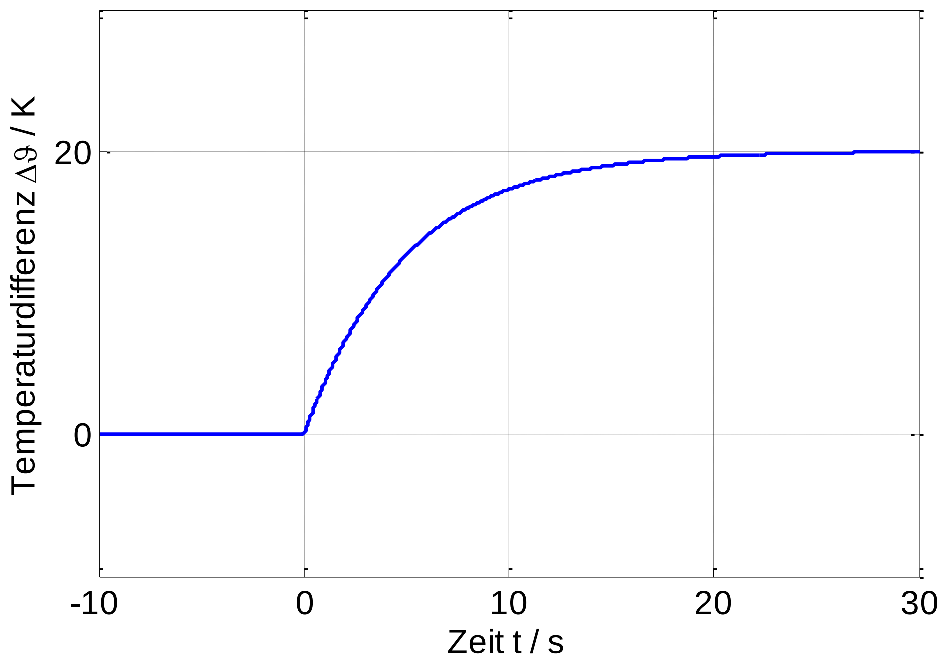
Eigenschaften von Systemen – Stabilität

- Aus dem Beispiel ergibt sich eine physikalische Stabilitätsdefinition: Ein System ist
  - asymptotisch stabil, wenn es nach einer Anregung mit endlicher Energie wieder seine Ruheposition erreicht
  - grenzstabil, wenn es nach Anregung mit endlicher Energie zu einem konstanten Ausgangswert konvergiert
  - instabil, wenn es auf eine Anregung endlicher Energie mit divergierendem Ausgangssignal reagiert
- Stabilitätsdefinition ist anschaulich, jedoch praktisch schlecht auszuwerten
- Stabilitätsbegriff und der entsprechende mathematische Nachweis wird erneut aufgegriffen bei der Diskussion der
  - charakteristischen Gleichung
  - Impulsantwort
  - Faltungsintegrals

Zeitkontinuierliche Systeme im Zeitbereich

Eigenschaften von Systemen – Kausalität

- Hängt das Ausgangssignals y(t) eines Systems zu einem Zeitpunkt $t = t_1$ nur von Eingangswerten u(t) mit $t \leq t_1$ ab, wird das System als kausales System bezeichnet
- Physikalisch sinnvolle und realisierbare Systeme sind wegen des Ursache-Wirkungsprinzips kausal
- Beispiel Aufheizvorgang, Temperatur steigt erst, wenn elektrische Leistung in das System eingebracht wird



Zeitkontinuierliche Systeme im Zeitbereich

Eigenschaften von Systemen – Zusammenfassung

Eigenschaft	Bedeutung
Linearität	Eingangssignal $u(t) = \nu_1 \cdot u_1(t) + \nu_2 \cdot u_2(t)$ Ausgangssignal $y(t) = \nu_1 \cdot y_1(t) + \nu_2 \cdot y_2(t)$
Zeitinvarianz	System reagiert auf Eingangssignal $u(t - t_0)$ mit Ausgangsignal $y(t - t_0)$
Stabilität	System erreicht nach einer Anregung mit endlicher Energie wieder seine Ruheposition
Kausalität	System reagiert auf ein Eingangssignal erst nach Beginn der Anregung