Hochschule Karlsruhe
Technik und Wirtschaft
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES
Näher dran.

EIT Fakultät für Elektro- und Informationstechnik

Systemtheorie

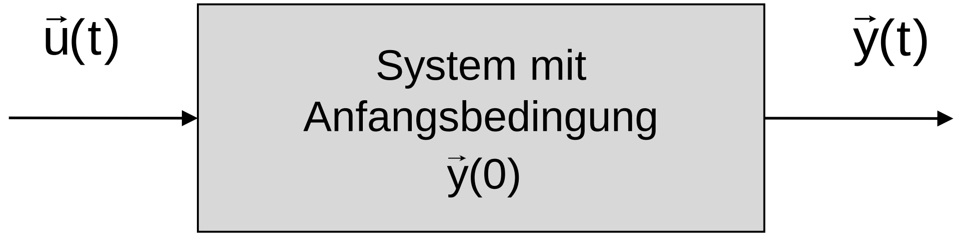
Vorlesung 6: Lösung linearer Differentialgleichungen

Fakultät für Elektro- und Informationstechnik, Manfred Strohrmann

Zeitkontinuierliche Systeme im Zeitbereich

Einführung

- Viele technischen Anwendungen lassen sich zumindest näherungsweise als lineare, zeitinvariante Systeme beschreiben, die durch lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten beschrieben werden
- Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten können über eine sogenannte Vier-Schritt-Methode gelöst werden
- Lösungsverfahren wird vorgestellt
- Zur Charakterisierung von Systemen werden gerne Sprung- und Impulsantworten verwendet, sie können ebenfalls mit der Vier-Schritt-Methode berechnen werden



Zeitkontinuierliche Systeme im Zeitbereich

Vier-Schritt-Methode

- Allgemeine Form der linearen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten

$$a_0 \cdot y(t) + a_1 \cdot \frac{dy}{dt} + a_2 \cdot \frac{d^2y}{dt^2} + \ldots + a_N \cdot \frac{d^Ny}{dt^N} = b_0 \cdot u(t) + b_1 \cdot \frac{du}{dt} + b_2 \cdot \frac{d^2u}{dt^2} + \ldots + b_M \cdot \frac{d^Mu}{dt^M}$$

- Zur Charakterisierung dieser Systeme wird das Einschwingverhalten y(t) eines Systems unter Berücksichtigung von Anfangswerten des Signals y(t = 0) bestimmt
- Diese Aufgabenstellungen werden in der Mathematik als Anfangswertprobleme bezeichnet, die Lösung dieser Anfangswertprobleme erfolgt mit der Vier-Schritt-Methode
- Vier-Schritt-Methode umfasst folgende Schritte
  - Berechnung der allgemeinen homogenen Lösungen
  - Berechnung einer partikulären Lösung
  - Superposition von homogener und partikulärer Lösung
  - Bestimmung der Konstanten über Anfangsbedingungen

Zeitkontinuierliche Systeme im Zeitbereich

Vier-Schritt-Methode – Lösung der allgemeinen homogenen Differentialgleichung

- Bei homogenen Differentialgleichungen wird das Eingangssignal u(t) zu null gesetzt

$$a_0 \cdot y_H(t) + a_1 \cdot \frac{dy_H}{dt} + a_2 \cdot \frac{d^2y_H}{dt^2} + \ldots + a_N \cdot \frac{d^Ny_H}{dt^N} = 0$$

- Sie besteht aus einer mit den Koeffizienten a_n gewichteten Summe der Funktion $y_H(t)$ und ihren Ableitungen
- Zur Lösung wird eine Exponentialfunktion angesetzt, da ihre Ableitung wieder eine Exponentialfunktion ist

$$y_H(t) = Y_0 \cdot e^{\lambda \cdot t} \qquad \frac{d^ny_H}{dt^n} = \lambda^n \cdot Y_0 \cdot e^{\lambda \cdot t}$$

- Einsetzen in die homogene Differentialgleichung ergibt

$$\begin{aligned} 0 &= a_0 \cdot y_H(t) + a_1 \cdot \frac{dy_H}{dt} + a_2 \cdot \frac{d^2y_H}{dt^2} + \ldots + a_N \cdot \frac{d^Ny_H}{dt^N} \\ &= a_0 \cdot Y_0 \cdot e^{\lambda \cdot t} + a_1 \cdot \lambda \cdot Y_0 \cdot e^{\lambda \cdot t} + a_2 \cdot \lambda^2 \cdot Y_0 \cdot e^{\lambda \cdot t} + \ldots + a_N \cdot \lambda^N \cdot Y_0 \cdot e^{\lambda \cdot t} \end{aligned}$$

Zeitkontinuierliche Systeme im Zeitbereich

Vier-Schritt-Methode – Lösung der allgemeinen homogenen Differentialgleichung

- Gleichung ist für $Y_0 = 0$ erfüllt, Fall ist jedoch technisch weniger von Interesse
- Für $Y_0 \neq 0$ kann die Gleichung vereinfacht werden zu

  $$0 = a_0 + a_1 \cdot \lambda + a_2 \cdot \lambda^2 + \ldots + a_N \cdot \lambda^N$$

- Mit der Gleichung werden die Werte λ_n bestimmt, für die die Exponentialfunktion die vorliegende homogene Differentialgleichung löst, sie wird charakteristische Gleichung des Systems genannt
- Polynom N-ter Ordnung weist N Nullstellen auf, so dass N Werte $\lambda_1 \ldots \lambda_N$ Lösungen der charakteristischen Gleichung sind
- Allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung $y_h(t)$ ergibt sich bei einfachen Werten λ_n aus der Linearkombination

  $$y_H(t) = Y_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot t} + Y_2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot t} + \ldots + Y_N \cdot e^{\lambda_N \cdot t}$$

- Existiert ein P-facher Wert λ_1, ergibt sich die homogene Lösung

  $$y_H(t) = Y_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot t} + Y_2 \cdot t \cdot e^{\lambda_1 \cdot t} + \ldots + Y_P \cdot t^{P-1} \cdot e^{\lambda_1 \cdot t} + Y_{P+1} \cdot e^{\lambda_2 \cdot t} + Y_{P+2} \cdot e^{\lambda_3 \cdot t} + \ldots + Y_N \cdot e^{\lambda_{N-P+1} \cdot t}$$

Zeitkontinuierliche Systeme im Zeitbereich

Beispiel: Vier-Schritt-Methode – Lösung der allgemeinen homogenen Differentialgleichung

- Ausgangsspannung des RC-Netzwerkes wird über eine lineare Differentialgleichung beschrieben

$$R \cdot C \cdot \frac{du_A}{dt} + u_A(t) = u_E(t)$$

- Homogene Differentialgleichung lautet

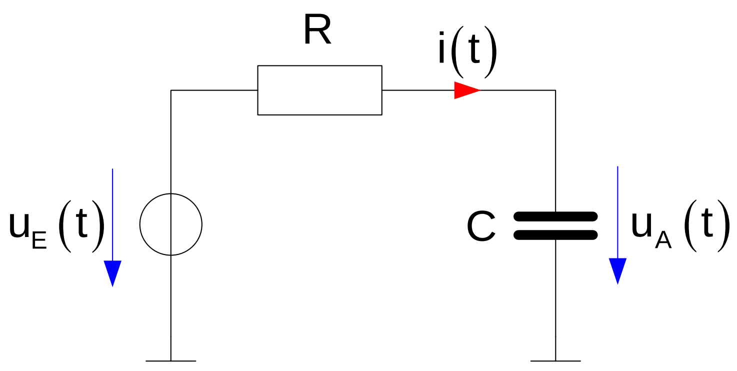
$$R \cdot C \cdot \frac{du_{AH}}{dt} + u_{AH}(t) = 0$$

- Einsetzen des Ansatzes

$$u_{AH}(t) = U_H \cdot e^{\lambda \cdot t}$$

- Charakteristischen Gleichung

$$0 = R \cdot C \cdot \lambda \cdot U_H \cdot e^{\lambda \cdot t} + U_H \cdot e^{\lambda \cdot t} = R \cdot C \cdot \lambda + 1$$



Zeitkontinuierliche Systeme im Zeitbereich

Beispiel: Vier-Schritt-Methode – Lösung der allgemeinen homogenen Differentialgleichung

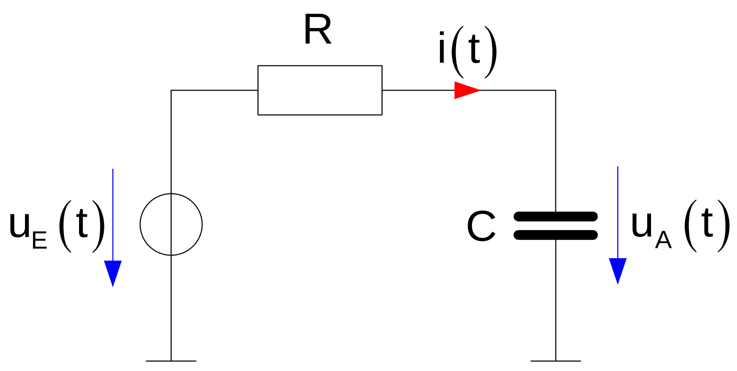
- Lösung der charakteristischen Gleichung

$$\lambda = -\frac{1}{R \cdot C}$$

- Lösung der homogenen Differentialgleichung

$$u_{AH}(t) = U_H \cdot e^{-\frac{1}{R \cdot C} \cdot t}$$

- Konstante U_H ist zunächst unbekannt, sie wird später über die Anfangsbedingung des Systems bestimmt



Zeitkontinuierliche Systeme im Zeitbereich

Vier-Schritt-Methode – Berechnung einer partikulären Lösung

- Bestimmung einer partikulären oder speziellen Lösung der Differentialgleichung für $u(t) \neq 0$ und $t \geq 0$

$$a_0 \cdot y(t) + a_1 \cdot \frac{dy}{dt} + a_2 \cdot \frac{d^2y}{dt^2} + \ldots + a_N \cdot \frac{d^Ny}{dt^N} = b_0 \cdot u(t) + b_1 \cdot \frac{du}{dt} + b_2 \cdot \frac{d^2u}{dt^2} + \ldots + b_M \cdot \frac{d^Mu}{dt^M}$$

- Wesentlich ist, dass eine beliebige partikuläre Lösung ausreicht, da sie durch Kombination mit der allgemeinen homogenen Lösung das Anfangswertproblem beschreibt
- Partikuläre Lösung der Differentialgleichung kann auf verschiedene Arten bestimmt werden, hier wird die Lösung durch Lösungsansätze vorgestellt
- Lösungsansätze sind im Allgemeinen von der Ordnung der Differentialgleichung abhängig, für eine konstanten Anregung $u(t) = U$ kann immer der Ansatz $y(t) = Y$ verwendet werden
- Freier Parameter Y des Lösungsansatzes ergibt sich aus dem vorliegenden Eingangssignal sowie der vorliegenden Differentialgleichung

Zeitkontinuierliche Systeme im Zeitbereich

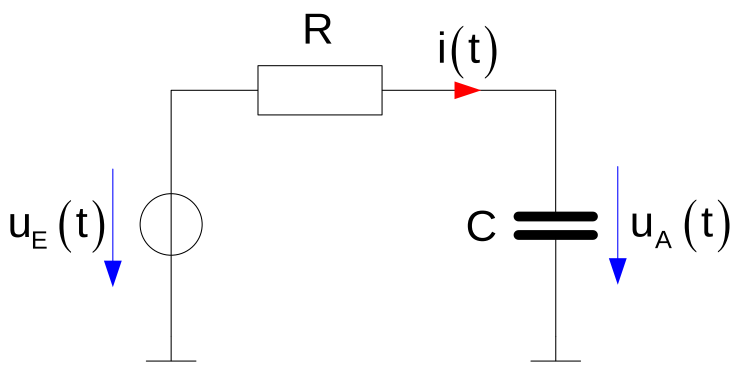
Beispiel: Vier-Schritt-Methode – Berechnung einer partikulären Lösung

- Berechnung der Systemreaktion auf ein konstantes Eingangssignal der Größe U_{E0}
- Einsetzen des Eingangssignals $u_E(t) = U_{E0}$ und des Ansatzes $u_{AP}(t) = U_{A0}$ in die Differentialgleichung

$$R \cdot C \cdot \frac{du_{AP}(t)}{dt} + u_{AP}(t) = U_{E0}$$

führt zu der Gleichung

$$R \cdot C \cdot 0 + U_{A0} = U_{E0}$$



- Konstanten U_{E0} und U_{A0} sind identisch, partikuläre Lösung lautet für $t \geq 0$

$$u_{AP}(t) = U_{E0}$$

Zeitkontinuierliche Systeme im Zeitbereich

Vier-Schritt-Methode – Superposition von homogener und partikulärer Lösung

- Sind die allgemeine homogene Lösung und die partikuläre Lösung bekannt, ergibt sich die Lösung der Differentialgleichung aus der Summe der beiden Lösungen

$$y(t) = y_H(t) + y_P(t)$$

- Für das Beispiel des RC-Gliedes mit der allgemeinen homogenen Lösung

$$u_{AH}(t) = U_H \cdot e^{-\frac{1}{R \cdot C} \cdot t}$$

und der partikulären Lösung

$$u_{AP}(t) = U_{E0}$$

ergibt sich das Ausgangssignal zu

$$u_A(t) = U_H \cdot e^{-\frac{1}{R \cdot C} \cdot t} + U_{E0}$$

Dabei ist die Konstante U_H noch unbekannt

Zeitkontinuierliche Systeme im Zeitbereich

Vier-Schritt-Methode – Bestimmung der Konstanten über Anfangsbedingungen

- Summe aus homogener und partikulärer Lösung weist Parameter auf, die bestimmt werden müssen
- Es kann gezeigt werden, dass bei einer Differentialgleichung N-ter Ordnung N Parameter bestimmt werden müssen, damit müssen N Bedingungen bekannt sein
- Bei Anfangswertproblemen sind diese Bedingung die Anfangswerte der Funktion y(t) und ihrer N - 1 Ableitungen
- Bei dem RC-Netzwerk handelt es sich um ein System, das mit einer Differentialgleichung erster Ordnung beschrieben wird, Parameter der Spannung U_H muss über die Anfangsbedingung $u_A(0)$ bestimmt werden

$$u_A(0) = U_H \cdot e^{-\frac{1}{R \cdot C} \cdot 0} + U_{E0} = U_H + U_{E0}$$

- Lösung des Anfangswertproblems in Abhängigkeit der Ausgangsspannung $u_A(0)$ zum Zeitpunkt t = 0 zu

$$u_A(t) = \left(u_A(0) - U_{E0}\right) \cdot e^{-\frac{1}{R \cdot C} \cdot t} + U_{E0} = u_A(0) \cdot e^{-\frac{1}{R \cdot C} \cdot t} + U_{E0} \cdot \left(1 - e^{-\frac{1}{R \cdot C} \cdot t}\right)$$

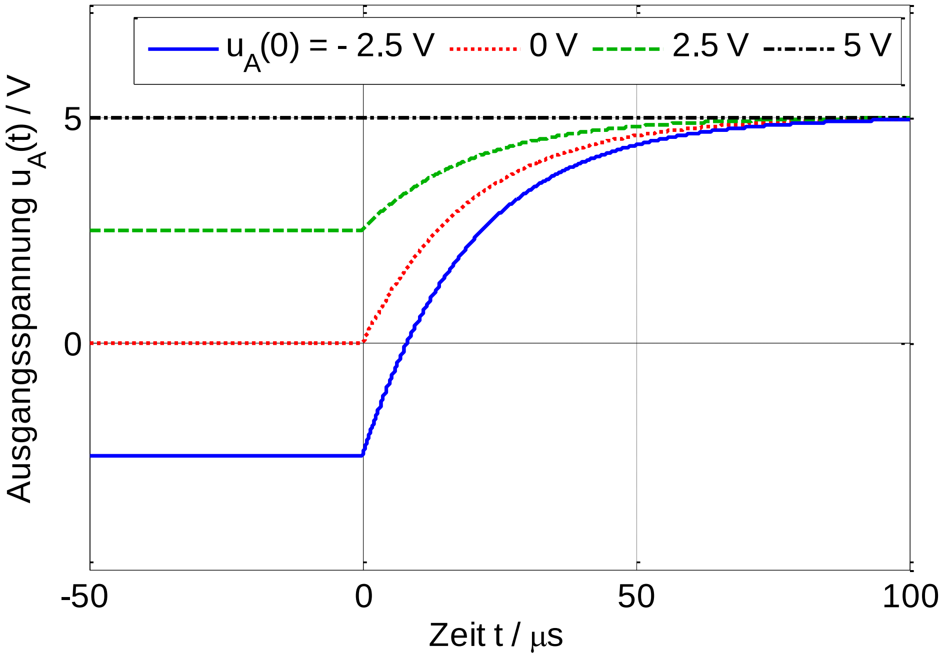
Zeitkontinuierliche Systeme im Zeitbereich

Beispiel: Vier-Schritt-Methode – Bestimmung der Konstanten über Anfangsbedingungen

- Ausgangsspannung setzt sich aus zwei Termen zusammen

$$u_A(t) = u_A(0) \cdot e^{-\frac{1}{R \cdot C} \cdot t} + U_{E0} \cdot \left(1 - e^{-\frac{1}{R \cdot C} \cdot t}\right)$$

- Erster Term beschreibt das Abklingen der Anfangsbedingung
- Zweiter Term beschreibt die Reaktion des Systems auf einen Spannungssprung am Eingang
- Darstellung des Einschwingverhalten der Kondensatorspannung $u_A(t)$ für $U_{E0} = 5$ V, R = 5 kΩ und C = 4 nF bei unterschiedlichen Anfangswerten
- Das Ausgangssignal schwingt abhängig von dem Anfangswert auf den Endwert von $u_A = 5$ V ein



Zeitkontinuierliche Systeme im Zeitbereich

Vier-Schritt-Methode – Zusammenfassung

Schritt	Beschreibung
1	Lösung der homogenen Differentialgleichung über Ansatz $$y_H(t) = Y_0 \cdot e^{\lambda \cdot t}$$ durch Lösen der charakteristischen Gleichung $$0 = a_0 + a_1 \cdot \lambda + a_2 \cdot \lambda^2 + \ldots + a_N \cdot \lambda^N$$
2	Bestimmung einer partikulären Lösung $y_P(t)$ - über einen Lösungsansatz je nach Eingangssignal - über die Methode Variation der Konstanten
3	Superposition von allgemeiner homogener und spezieller partikulärer Lösung $$y(t) = y_H(t) + y_P(t)$$
4	Bestimmung der nicht definierten Konstanten über Anfangsbedingungen

Zeitkontinuierliche Systeme im Zeitbereich

Vier-Schritt-Methode – Stabilität und charakteristische Gleichung

- Stabile Systeme kehren nach einer Anregung mit endlicher Energie wieder in ihren Ausgangszustand zurück
- Verhalten des Systems nach der Anregung wird durch die homogene Lösung der Differentialgleichung beschrieben, sie setzt sich bei einfachen Lösungen λ_n aus einer Linearkombination von Exponentialfunktionen zusammen

$$y_H(t) = Y_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot t} + Y_2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot t} + \ldots + Y_N \cdot e^{\lambda_N \cdot t}$$

- Damit die homogene Lösung für $t \to \infty$ zu null wird, müssen die Lösungen λ_n einen Realteil $\mathrm{Re}(\lambda_n) < 0$ aufweisen, besitzt ein Wert λ_n einen positiven Realteil, divergiert der entsprechende Summand der homogenen Lösung und damit auch die gesamte Lösung der homogenen Differentialgleichung
- Liegt mit λ_1 eine P-fache Lösung der charakteristischen Gleichung vor, weisen die zugehörigen Summanden der homogenen Lösung Terme der Form

$$y_H(t) = Y_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot t} + Y_2 \cdot t \cdot e^{\lambda_1 \cdot t} + \ldots + Y_P \cdot t^{P-1} \cdot e^{\lambda_1 \cdot t}$$

Zeitkontinuierliche Systeme im Zeitbereich

Vier-Schritt-Methode – Stabilität und charakteristische Gleichung

- Exponentialfunktion fällt schneller und wächst schnelle als jede Potenz von t, damit konvergiert diese Summe ebenfalls für einen negativen Realteils Re(λ_1) < 0, und sie divergiert für einen positiven Realteil Re(λ_1) > 0, es ist unerheblich, ob die Lösungen λ_n reell oder komplex sind
- Sonderfall: Lösungen mit einem Realteil Re(λ_n) = 0 dar.

$$y_H(t) = Y_1 \cdot e^{0\cdot t} + Y_2 \cdot e^{(0+j\cdot\omega)\cdot t} + Y_3 \cdot e^{(0-j\cdot\omega)\cdot t} + ... = Y_1 + Y_2 \cdot e^{j\cdot\omega\cdot t} + Y_3 \cdot e^{-j\cdot\omega\cdot t} + ..$$

- Lösungen sind konstant bzw. schwingen mit konstanter Amplitude, für den Fall einfacher Lösungen liegt damit weder eine konvergente, noch eine divergente Lösung vor, Fall entspricht dem diskutierten Fall der Grenzstabilität des zugehörigen Systems
- Besitzt eine Lösung mit Re(λ_n) = 0 eine Vielfachheit von P > 1, entstehen Terme der Form

$$y_H(t) = Y_1 + Y_2 \cdot t + Y_3 \cdot t^2 + ... + Y_4 \cdot e^{j\cdot\omega\cdot t} + Y_5 \cdot t \cdot e^{j\cdot\omega\cdot t} + Y_6 \cdot t^2 \cdot e^{j\cdot\omega\cdot t} + ... + Y_7 \cdot e^{-j\cdot\omega\cdot t} + Y_8 \cdot t \cdot e^{-j\cdot\omega\cdot t} + Y_9 \cdot t^2 \cdot e^{-j\cdot\omega\cdot t} + ..$$

- Exponentialfunktion dämpft die Terme t^n nicht, die Ausdrücke divergieren und damit die gesamte homogene Lösung, System ist instabil

Zeitkontinuierliche Systeme im Zeitbereich

Vier-Schritt-Methode – Zusammenfassung Stabilität und charakteristische Gleichung

Eigenschaft	Lösungen λ_n der charakteristischen Gleichung
Asymptotisch stabiles System	Alle Lösungen λ_n besitzen einen negativen Realteil $Re(\lambda_n) < 0$
Grenzstabiles System	Alle Lösungen λ_n besitzen einen negativen Realteil $Re(\lambda_n) < 0$, zusätzlich liegt mindestens eine einfache Lösung mit $Re(\lambda_n) = 0$ vor
Instabiles System	Es existiert mindestens eine Lösung λ_n mit positivem Realteil $Re(\lambda_n) > 0$ oder eine mehrfache Lösung mit $Re(\lambda_n) = 0$