Hochschule Karlsruhe
Technik und Wirtschaft
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Näher dran.

EIT Fakultät für Elektro- und Informationstechnik

Systemtheorie

Vorlesung 7: Impulsantwort und Superposition

Fakultät für Elektro- und Informationstechnik, Manfred Strohrmann

Zeitkontinuierliche Systeme im Zeitbereich

Sprung- und Impulsantwort eines Systems

- Antwort des RC-Netzwerkes auf einen Spannungs-sprung am Eingang des Systems ergibt sich zu

$$u_A(t) = u_A(0) \cdot e^{-\frac{1}{R \cdot C} \cdot t} + U_{E0} \cdot \left(1 - e^{-\frac{1}{R \cdot C} \cdot t}\right)$$

- Ausgangssignal ist von der Anfangsspannung $u_A(0)$ abhängig
- Ist die Spannung $u_A(0) = 0$, ist die in dem Kondensator gespeicherte Energie null, das System ist energiefrei
- Reaktion eines energiefreien Systems auf eine sprungförmige Erregung $\sigma(t)$ wird als Sprungantwort $h(t)$ bezeichnet

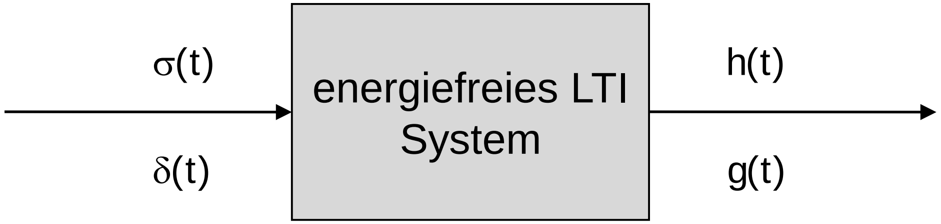
$$h(t) = \left(1 - e^{-\frac{t}{R \cdot C}}\right) \cdot \sigma(t)$$

Zeitkontinuierliche Systeme im Zeitbereich

Sprung- und Impulsantwort eines Systems

- Impulsantwort g(t) ist die Reaktion eines energiefreien Systems auf eine Anregung mit einem Impuls $\delta(t)$
- Impulsfunktion $\delta(t)$ kann als Ableitung der Sprungfunktion $\sigma(t)$ gedeutet werden

$$\delta(t) = \frac{d\sigma}{dt}$$



- LTI-Systeme: Systemreaktion auf einen Impuls am Eingang ergibt sich aus Ableitung der Sprungantwort

$$g(t) = \frac{dh}{dt}$$

- Impulsantwort eines RC-Netzwerks

$$g(t) = \frac{dh}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\left(1 - e^{-\frac{t}{R\cdot C}}\right)\cdot\sigma(t)\right) = \frac{1}{R\cdot C}\cdot e^{-\frac{t}{R\cdot C}}\cdot U_{E0}\cdot\sigma(t) - \left(1 - e^{-\frac{t}{R\cdot C}}\right)\cdot\delta(t) = \frac{1}{R\cdot C}\cdot e^{-\frac{t}{R\cdot C}}\cdot U_{E0}\cdot\sigma(t)$$

Zeitkontinuierliche Systeme im Zeitbereich

Berechnung der Systemantwort durch Superposition

- Aufgrund der Linearität eines LTI-Systems kann die Systemantwort auf ein aus grundlegenden Funktionen zusammengesetztes Eingangssignal durch die entsprechende Kombination der Ausgangssignale bestimmt werden
- Wird zum Beispiel ein RC-Netzwerk mit einer Rechteckfunktion der Länge t_0 und der Höhe U_{E0} beaufschlagt, kann das Eingangssignal als Summe zweier Sprungfunktionen dargestellt werden

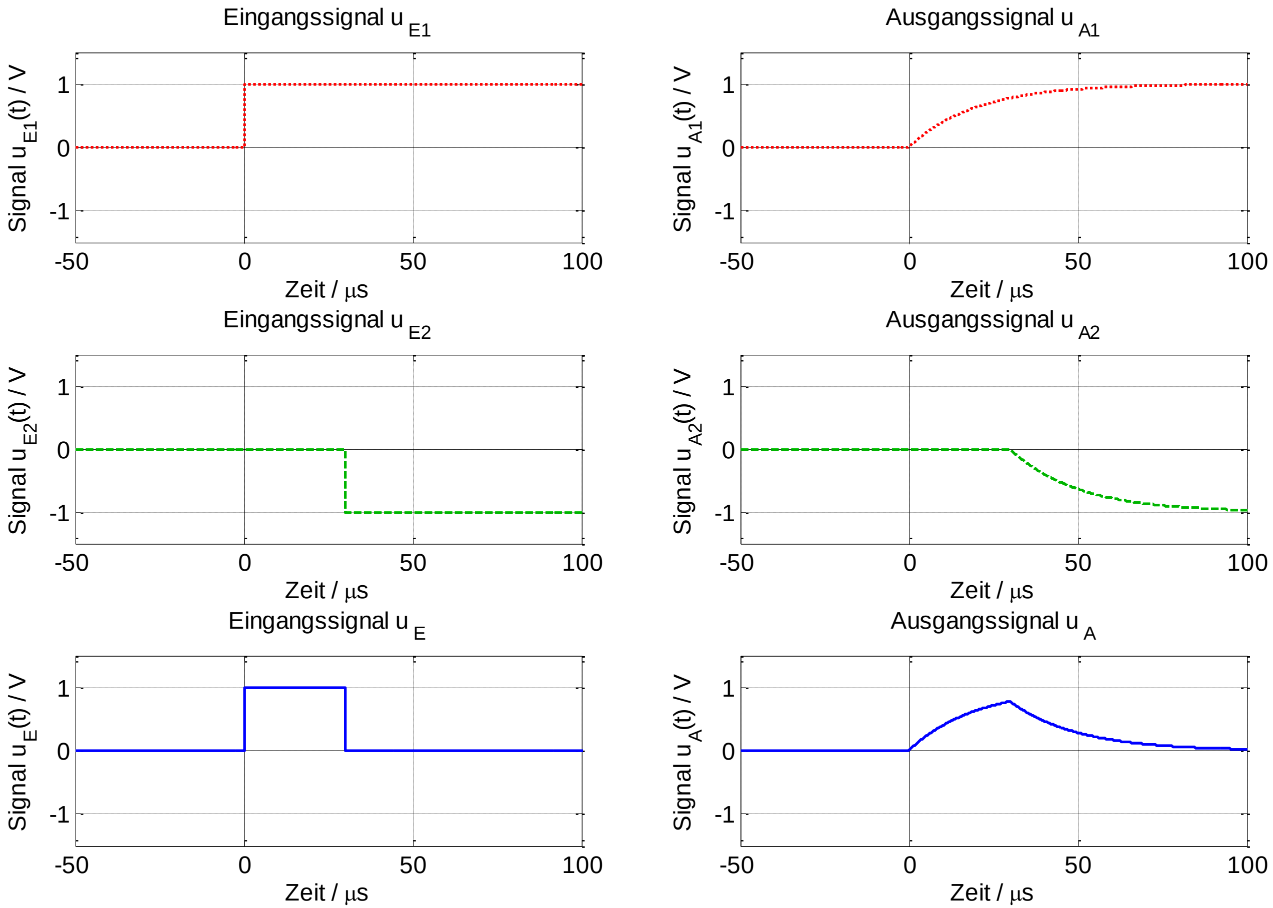
$$u_E(t) = U_{E0} \cdot \left(\sigma(t) - \sigma(t - t_0)\right) = U_{E0} \cdot \sigma(t) - U_{E0} \cdot \sigma(t - t_0)$$

- Ausgangsignal u_A ergibt sich aus der Summe der beiden Sprungantworten

$$u_A(t) = U_{E0} \cdot \left(h(t) - h(t - t_0)\right) = U_{E0} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{R \cdot C}}\right) \cdot \sigma(t) - U_{E0} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t - t_0}{R \cdot C}}\right) \cdot \sigma(t - t_0)$$

- Eingangssignal kann damit in eine Linearkombination verschiedener Signale zerlegt werden, deren Systemantworten bekannt sind
- Ausgangssignal ergibt sich aus derselben Linearkombination der entsprechenden Ausgangssignale

Beispiel: Berechnung der Systemantwort durch Superposition bei dem RC-Glied



Zeitkontinuierliche Systeme im Zeitbereich

Faltungsintegral – Herleitung des Faltungsintegrals

- Ein lineares, zeitinvariantes System antwortet auf einen Impuls $\delta(t)$ am Eingang mit der Impulsantwort
- Entsprechend antwortet es z.B. auf eine Linearkombination von Impulsen

  $$u(t) = \nu_1 \cdot \delta(t) + \nu_2 \cdot \delta(t-3)$$

  mit der gleichen Linearkombination von Impulsantworten

  $$y(t) = \nu_1 \cdot g(t) + \nu_2 \cdot g(t-3)$$

- Zusammenhang kann auf beliebige Eingangssignale verallgemeinert werden
- Mit der Ausblendeigenschaft der Impulsfunktion $\delta(t)$ kann ein beliebiges Eingangssignal u(t) dargestellt werden als

  $$u(t) = u(t) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-\tau)\ d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \cdot \delta(t-\tau)\ d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) \cdot \delta(t-\tau)\ d\tau$$

- Anschaulich kann die Gleichung als Superposition unendlich vieler Impulse $\delta(t - \tau)$ mit dem Gewicht $u(\tau)$ interpretiert werden, die zusammen das Signal u(t) darstellen

Zeitkontinuierliche Systeme im Zeitbereich

Faltungsintegral – Herleitung des Faltungsintegrals

- Jeder einzelne Impuls $\delta(t - \tau)$ besitzt die Systemantwort $g(t - \tau)$, damit ergibt sich das Ausgangssignal $y(t)$ aus der Superposition unendlich vieler Systemantworten $g(t - \tau)$ mit dem Gewicht $u(\tau)$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) \cdot g(t - \tau) \; d\tau = u(t) * g(t)$$

- Bei bekannter Impulsantwort $g(t)$ kann das Ausgangssignal $y(t)$ für eine beliebige Systemanregung $u(t)$ berechnet werden

- Integral wird als Faltungsintegral bezeichnet, abkürzend wird die Faltungsoperation mit einem $*$ - Symbol dargestellt

Zeitkontinuierliche Systeme im Zeitbereich

Faltungsintegral – Grafische Interpretation des Faltungsintegrals

- Faltungsintegral erscheint zunächst kompliziert und wenig griffig, es kann aber grafisch interpretiert werden

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) \cdot g(t-\tau)\ d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) \cdot g(-(\tau - t))\ d\tau$$

- Faltungsintegral wird für einen festen Zeitpunkt t ausgewertet, es ist die Fläche unter einer Funktion, die sich aus dem Produkt zweier Teilfunktionen ergibt
  - Erste Teilfunktion ist das bekannte Eingangssignal $u(\tau)$
  - Zweite Teilfunktion ist die berechnete Impulsantwort $g(\tau)$, die jedoch an der Achse $\tau = 0$ gespiegelt und um t nach rechts verschoben ist

- Vorgehen zur grafischen Auswertung des Faltungsintegrals:
  - Skizzieren der Funktion $u(\tau)$
  - Skizzieren der Funktion $g(-(\tau - t))$ durch Spiegeln der Funktion $g(\tau)$ und Verschiebung um t nach rechts
  - Berechnen des Produktes der beiden Funktionen $u(\tau) \cdot g(-(\tau - t))$
  - Auswertung der Fläche unter der Kurve $u(\tau) \cdot g(-(\tau - t))$

Zeitkontinuierliche Systeme im Zeitbereich

Beispiel: Faltungsintegral – Grafische Interpretation des Faltungsintegrals

- Vorgehen wird an der Faltung zweier Rechteckfunktionen verdeutlicht

$$u(t) = \sigma(t) - \sigma(t-2)$$

$$g(t) = 2 \cdot \left(\sigma(t) - \sigma(t-4)\right)$$

- Darstellung beider Funktionen als Funktion der Variablen τ

$$u(\tau) = \sigma(\tau) - \sigma(\tau-2)$$

$$g(\tau) = 2 \cdot \left(\sigma(\tau) - \sigma(\tau-4)\right)$$

- Funktion g wird an der Achse $\tau = 0$ gespiegelt

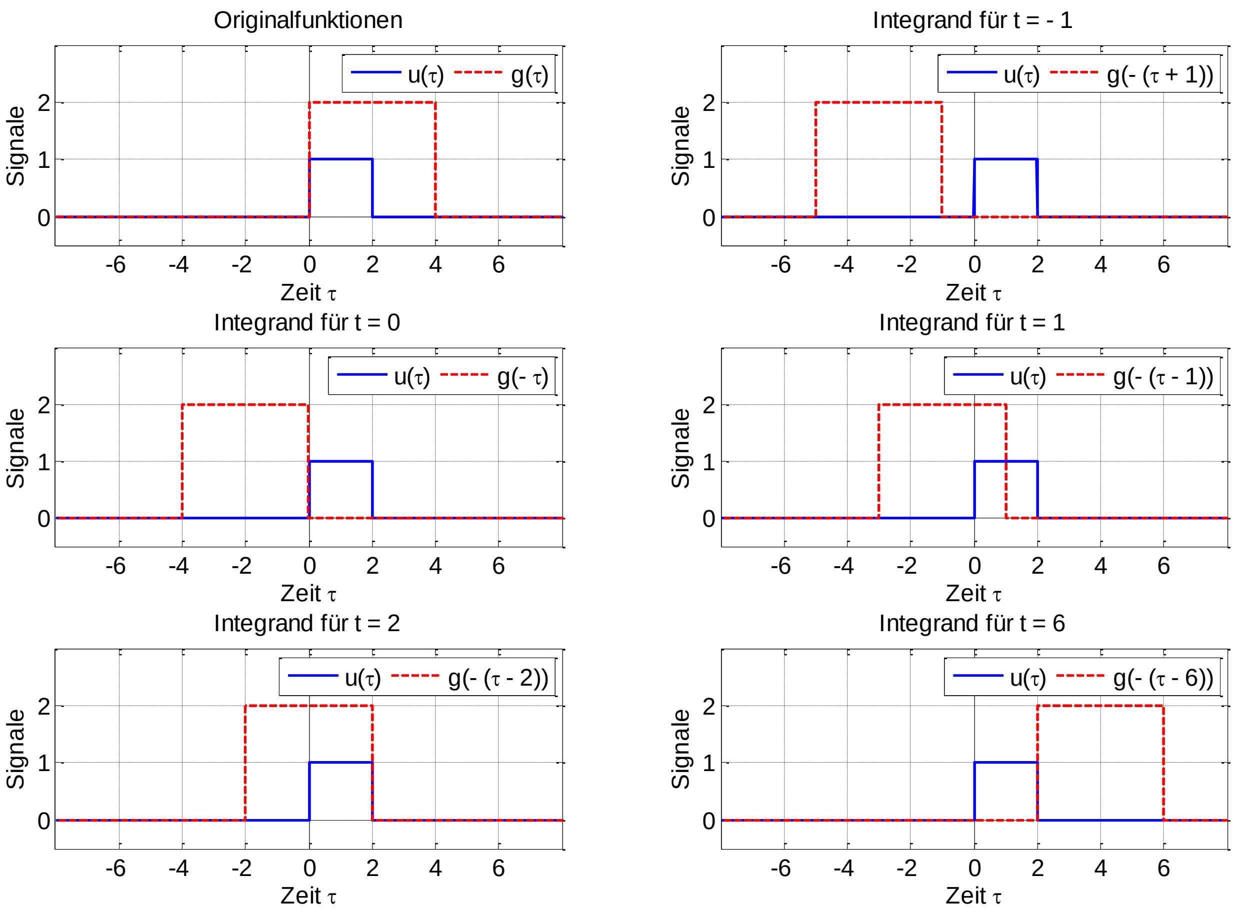
$$g(-\tau) = 2 \cdot \left(\sigma(-\tau) - \sigma(-(\tau-4))\right)$$

und um t nach rechts verschoben

$$g(t-\tau) = g(-(\tau-t)) = 2 \cdot \left(\sigma(-(\tau-t)) - \sigma(-(\tau-t-4))\right)$$

Zeitkontinuierliche Systeme im Zeitbereich

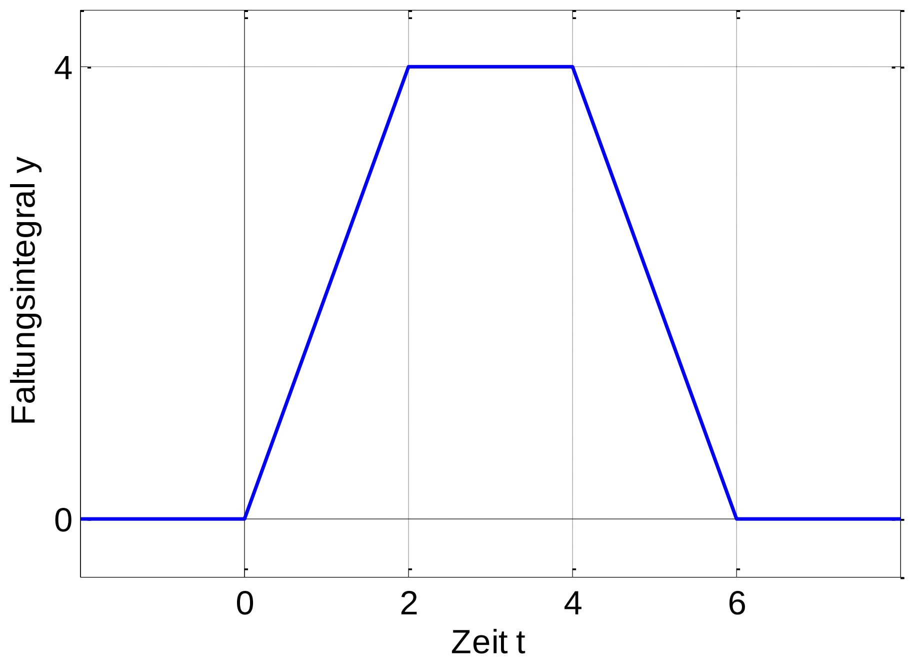
Beispiel: Faltungsintegral – Grafische Interpretation des Faltungsintegrals



Zeitkontinuierliche Systeme im Zeitbereich

Beispiel: Faltungsintegral – Grafische Interpretation des Faltungsintegrals

- Für einen festen Zeitpunkt t ergibt sich der Wert des Faltungsintegrals aus der Fläche unter der Rechteckfunktion, durch Verschiebung der Funktion g ändert sich die Fläche
- Überlappung der beiden Rechtecke steigt von t = 0 bis t = 2 linear an und hat für t = 2 den maximalen Wert von 4
- Werte bleibt bis t = 4 konstant, danach reduziert sich die Überlappung wieder linear, und es ergibt sich ein Wert von 0 für t = 6
- Darstellung des Faltungsintegrals als Funktion der Zeit t



Zeitkontinuierliche Systeme im Zeitbereich

Faltungsintegral – Grafische Interpretation des Faltungsintegrals

- Visualisierung der Faltungsoperation als Applikation
- Link auf Applikation in Systemtheorie Online verfügbar
- Darstellung verschiedener Stufen der Faltung
  - Signale
  - gespiegelte und verschobene Signale
  - Produkt der Signale
  - Integral des Produktes
- Einstellen unterschiedlicher Teilsignale, Berechnen des Faltungsintegrals