Hochschule Karlsruhe
Technik und Wirtschaft
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES
Näher dran.

EIT Fakultät für Elektro- und Informationstechnik

Systemtheorie

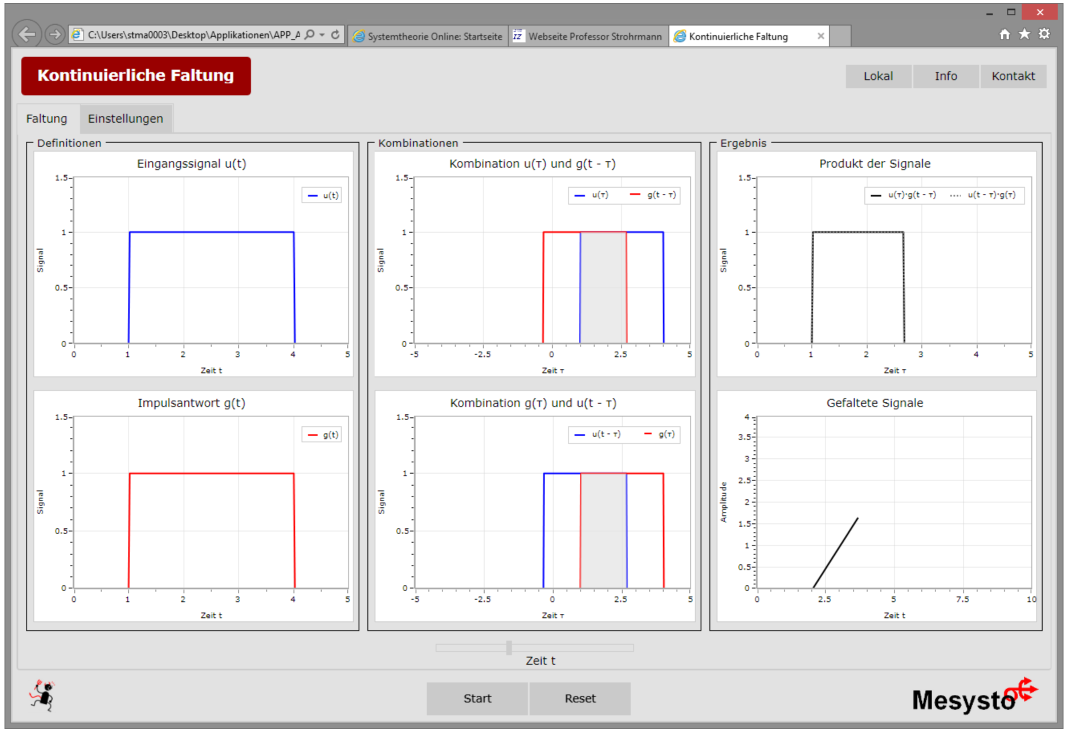
Vorlesung 8: Faltungsintegral

Fakultät für Elektro- und Informationstechnik, Manfred Strohrmann

Zeitkontinuierliche Systeme im Zeitbereich

Faltungsintegral – Grafische Interpretation des Faltungsintegrals

- Visualisierung der Faltungsoperation als Applikation
- Link auf Applikation in Systemtheorie Online verfügbar
- Darstellung verschiedener Stufen der Faltung
  – Signale
  – gespiegelte und verschobene Signale
  – Produkt der Signale
  – Integral des Produktes
- Einstellen unterschiedlicher Teilsignale, Berechnen des Faltungsintegrals



Zeitkontinuierliche Systeme im Zeitbereich

Faltungsintegral – Faltung mit einer Impulsfunktion

- Besondere Bedeutung hat die Faltung mit Impulsfunktionen
- Signal x(t) soll mit der verschobenen Impulsfunktion $\delta(t - t_0)$ gefaltet werden

$$x(t) * \delta(t - t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \tau) \cdot \delta(\tau - t_0)\, d\tau$$

- Integrand ist an allen Stellen null, nur nicht an der Stelle $\tau = t_0$, damit kann das Integral umgeformt werden

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t - \tau) \cdot \delta(\tau - t_0)\, d\tau = x(t - t_0) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau - t_0)\, d\tau$$

- Integral über eine Impulsfunktion ist immer 1

$$x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau - t_0)\, d\tau = x(t - t_0)$$

- Faltung eines Signals x(t) mit einem um t_0 verschobenen Impuls $\delta(t - t_0)$ verschiebt das Signal an die Stelle des Impulses, Visualisierung mit Applikation Faltung

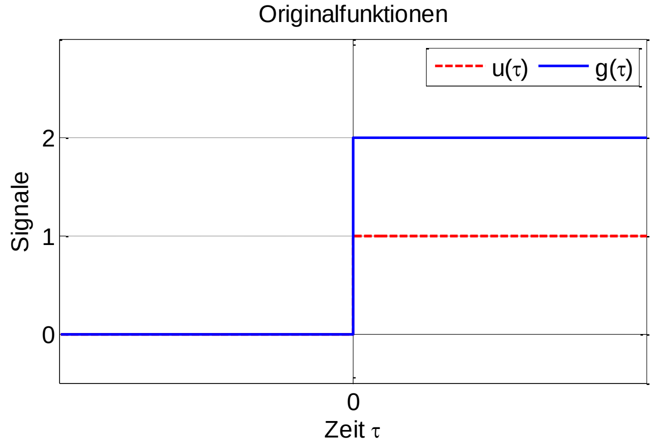
Zeitkontinuierliche Systeme im Zeitbereich

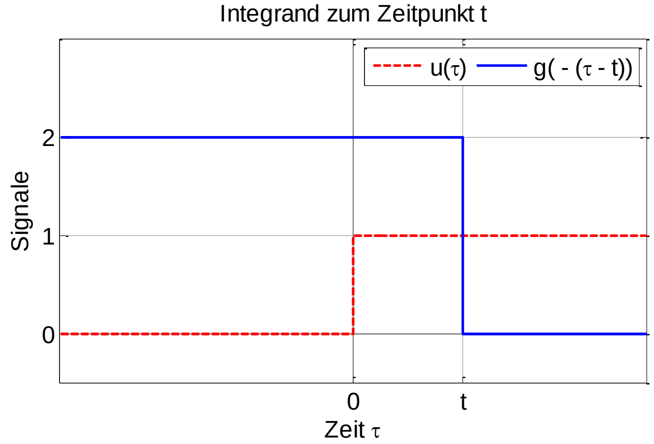
Faltungsintegral – Faltung kausaler Funktionen

- Sind die Funktionen g(t) und u(t) kausale Funktionen, reduziert sich das Faltungsintegral auf den Bereich von 0 … t
- Funktion $u(\tau)$ ist für den Bereich $\tau < 0$ null, die Funktion $g(t - \tau)$ ist für den Bereich $\tau > t$ null. Damit ist das Produkt der beiden Funktionen nur in dem Bereich von 0 … t von null verschieden
- Für kausale Funktionen u(t) und g(t) gilt deshalb

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) \cdot g(t-\tau)\ d\tau = \int_{0}^{t} u(\tau) \cdot g(t-\tau)\ d\tau$$

- Zusammenfassung weiterer Rechenregeln ohne Herleitung





Zeitkontinuierliche Systeme im Zeitbereich

Beispiel Faltungsintegral – Zusammenfassung der Rechenregeln

Gesetz	Mathematische Beschreibung
Kommutativgesetz	$x_1(t) * x_2(t) = x_2(t) * x_1(t)$
Assoziativgesetz	$\left(x_1(t) * x_2(t)\right) * x_3(t) = x_1(t) * \left(x_2(t) * x_3(t)\right)$
Distributivgesetz	$\left(x_1(t) + x_2(t)\right) * x_3(t) = x_1(t) * x_3(t) + x_2(t) * x_3(t)$
Faltung kausaler Signale	$\int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) \cdot g(t-\tau)\ d\tau = \int_{0}^{t} u(\tau) \cdot g(t-\tau)\ d\tau$
Faltung mit einem Impuls an der Stelle t_0	$x(t) * \delta(t-t_0) = x(t-t_0)$

Zeitkontinuierliche Systeme im Zeitbereich

Beispiel: Faltungsintegral – RC-Netzwerk

- Berechnung des Faltungsintegrals wird an der Bestimmung der Antwort des RC-Netzwerks bei Anregung mit einer Rechteckfunktion vertieft

- Impulsantwort g(t) des RC-Netzwerkes

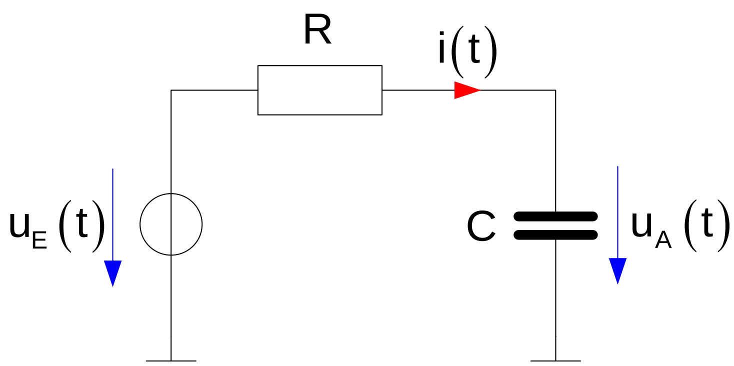
$$g(t) = \frac{1}{R \cdot C} \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}} \cdot \sigma(t)$$

- Rechteck-Signal als Eingangssignal

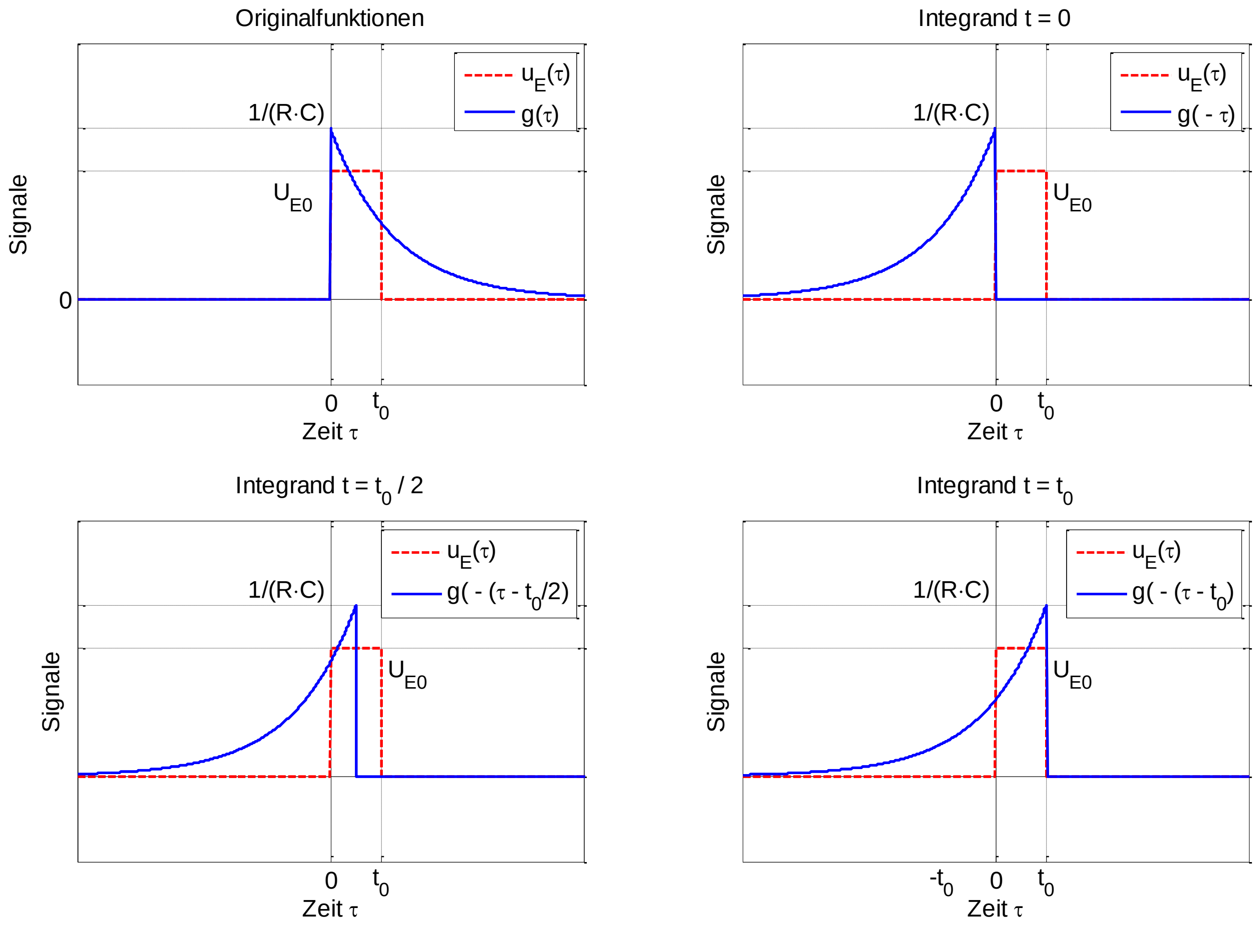
$$u_E(t) = \begin{cases} U_{E0} & \text{für } 0 \le t < t_0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- Signale sind beide kausal, damit ergibt sich Ausgangssignal zu

$$u_A(t) = \int_0^t u_E(\tau) \cdot g(t - \tau)\, d\tau$$



Beispiel: Faltungsintegral – RC-Netzwerk



Zeitkontinuierliche Systeme im Zeitbereich

Beispiel: Faltungsintegral – RC-Netzwerk

- Zeitraum $t < 0$:
  Für alle τ ist zumindest eine der beiden Funktionen null, das Faltungsintegral ist damit für $t < 0$ null

  $$u_A(t) = 0$$

- Zeitraum $0 < t < t_0$:
  Funktionen überlappen sich in dem Bereich $0 \le \tau \le t$, Berechnung des Integrals

$$u_A(t) = \int_0^t g(t-\tau) \cdot U_{E0}\, d\tau = U_{E0} \cdot \frac{1}{R \cdot C} \cdot e^{-\frac{t}{RC}} \cdot RC \cdot e^{\frac{\tau}{RC}} \Bigg|_0^t = U_{E0} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

- Zeitraum $t \ge t_0$:
  Funktionen überlappen ganz und die Integration erstreckt sich von 0 bis t_0

$$u_A(t) = \int_0^{t_0} g(t-\tau) \cdot U_{e0}\, d\tau = U_{E0} \cdot \frac{1}{R \cdot C} \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}} \cdot R \cdot C \cdot e^{\frac{\tau}{R \cdot C}} \Bigg|_0^{t_0} = U_{E0} \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}} \cdot \left(e^{\frac{t_0}{R \cdot C}} - 1\right) = U_{E0} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t_0}{R \cdot C}}\right) \cdot e^{-\frac{t-t_0}{R \cdot C}}$$

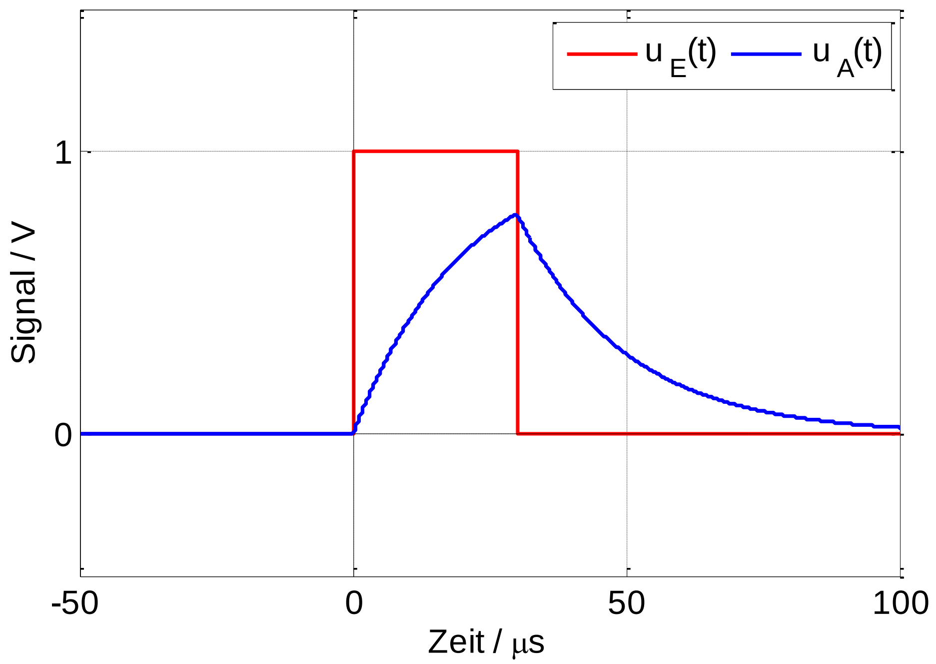
Zeitkontinuierliche Systeme im Zeitbereich

Beispiel: Faltungsintegral – RC-Netzwerk

- Zusammenfassung des Ausgangssignals

$$u_A(t) = \begin{cases} U_{E0} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) & \text{für } 0 \le t < t_0 \\ U_{E0} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t_0}{R \cdot C}}\right) \cdot e^{-\frac{t - t_0}{R \cdot C}} & \text{für } t \ge t_0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- Berechnung des Ausgangssignals mit Superpositionsprinzip bestätigt Ergebnis



Zeitkontinuierliche Systeme im Zeitbereich

Faltungsintegral – Berechnung der Systemantwort über das Faltungsintegral

Schritt	Beschreibung
1	Berechnung der Impulsantwort
2	Skizze von Eingangssignal $u(\tau)$ und Impulsantwort $g(\tau)$
3	Skizze von einem der Signale $u(t - \tau)$ oder $g(t - \tau)$ über Spiegelung an der Achse $\tau = 0$ und Verschiebung um t nach rechts
4	Aufteilen des Faltungsintegrals in sinnvolle Zeitbereiche (Überlappungsbereiche, Sprungstellen, Definitionsgrenzen, ...)
5	Lösen der Integrale und Superposition der Ergebnisse

Faltungsintegral – Impulsantwort und Stabilität

- Diskussion der Stabilität von Systemen aus physikalischer Sicht
- Mit dem Wissen, dass sich bei einem LTI-System die Systemantwort y(t) aus dem Faltungsintegral ergibt, kann die Stabilitätsbewertung auf die Impulsantwort g(t) zurückgeführt werden
- Es wird davon ausgegangen, dass das System in einem Zeitraum $0 < t \leq t_0$ angeregt wird, zur Stabilitätsbewertung wird das Ausgangssignal für $t \geq t_0$ analysiert

$$y(t) = \int_0^{t_0} u(\tau) \cdot g(t-\tau)\ d\tau$$

- Aus physikalischer Bedingung an asymptotische Stabilität leitet sich die Forderung ab

$$\lim_{t \to \infty} \left| y(t) \right| = 0$$

Zeitkontinuierliche Systeme im Zeitbereich

Faltungsintegral – Impulsantwort und Stabilität

- Ist Betrag des Eingangssignals beschränkt, kann er mit $|u(\tau)| < u_{MAX}$ abgeschätzt werden, Betrag des Ausgangssignals ergibt sich zu

$$\left|y(t)\right| \le \int_0^{t_0} \left|u(\tau)\right| \cdot \left|g(t-\tau)\right| \; d\tau < u_{MAX} \cdot \int_0^{t_0} \left|g(t-\tau)\right| \; d\tau$$

- Integral erstreckt sich über einen endlichen Zeitraum

$$\left|y(t)\right| \le \int_0^{t_0} \left|u(\tau)\right| \cdot \left|g(t-\tau)\right| \; d\tau < u_{MAX} \cdot \int_0^{t_0} \left|g(t-\tau)\right| \; d\tau$$

- Es wird zu null, wenn der Betrag der Impulsantwort g(t) gegen null konvergiert

$$\lim_{t \to \infty} g(t) = 0$$

- System ist damit asymptotisch stabil, wenn die Impulsantwort gegen null konvergiert

Zeitkontinuierliche Systeme im Zeitbereich

Faltungsintegral – Impulsantwort und Stabilität

- Aus der physikalischen Bedingung an grenzstabile Systeme leitet sich die Forderung ab, dass das Ausgangssignal bei einer zeitlich begrenzten Anregung eine konstante Amplitude $y_0 \neq 0$ einnehmen muss

$$\lim_{t\to\infty} \left| y(t) \right| = y_0 < \infty$$

- Ausgangssignal y(t) errechnet sich für Impulsantworten g(t), die für $t \to \infty$ einem konstanten Wert g_0 zustreben, über

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \int_0^{t_0} u(\tau) \cdot g(t-\tau)\ d\tau = g_0 \cdot \int_0^{t_0} u(\tau)\ d\tau = y_0$$

- Ausgangssignal konvergiert für $t \geq t_0$ gegen einen konstanten Wert
- Systeme, deren Impulsantworten g(t) für $t \to \infty$ einem konstanten Wert $g_0 \neq 0$ zustreben, entsprechen damit den Bedingungen grenzstabiler Systeme

Zeitkontinuierliche Systeme im Zeitbereich

Faltungsintegral – Impulsantwort und Stabilität

- Systeme, deren Impulsantwort für $t \rightarrow \infty$ mit konstanter Amplitude schwingt, entsprechen damit den Bedingungen grenzstabiler Systeme
- Aus Faltungsintegral

$$\left|y(t)\right| \leq \int_0^{t_0} \left|u(\tau)\right| \cdot \left|g(t-\tau)\right| \, d\tau < u_{max} \cdot \int_0^{t_0} \left|g(t-\tau)\right| \, d\tau$$

wird deutlich, dass das Ausgangssignal y(t) bei divergierender Impulsantwort ebenfalls divergiert, Systeme mit divergierender Impulsantwort sind damit instabil.

Zeitkontinuierliche Systeme im Zeitbereich

Faltungsintegral – Zusammenfassung Impulsantwort und Stabilität

Eigenschaft	Bedeutung
Asymptotisch stabiles System	$\lim_{t \to \infty} g(t) = 0$
Grenzstabiles System	$\lim_{t \to \infty} g(t) = g_0 \neq 0$ oder harmonische Schwingung mit konstanter Amplitude
Instabiles System	$\lim_{t \to \infty} g(t)$ ist divergent

Zeitkontinuierliche Systeme im Zeitbereich

Beispiel: Faltungsintegral – Integrierer als grenzstabiles System

- Impulsantwort eines Integrierers

$$g(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\, d\tau = \sigma(t)$$

- Impulsantwort besitzt für $t \to \infty$ den konstanten Wert $g_0 = 1$, das System ist demnach grenzstabil
- Wird als Eingangssignal ein Rechtecksignal

$$x(t) = \sigma(t) - \sigma(t-2)$$

gewählt, ergibt sich das Ausgangssignal durch grafische Faltung zu

$$y(t) = t \cdot \sigma(t) - (t-2) \cdot \sigma(t-2)$$

- Wird das Eingangssignal zeitlich begrenzt, besitzt der Integrierer ein endliches Ausgangssignal, er ist ein grenzstabiles System