Hochschule Karlsruhe
Technik und Wirtschaft
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Näher dran.

EIT Fakultät für Elektro- und Informationstechnik

Systemtheorie

Vorlesung 09: Grundlagen der Laplace-Transformation

Fakultät für Elektro- und Informationstechnik, Manfred Strohrmann

Laplace-Transformation

Grundlagen – Einleitung

- Zeitkontinuierliche Signale können mit Hilfe der Laplace-Transformation in einen sogenannten Laplace- oder Laplace-Bereich transformiert werden
- Vorteile des Laplace-Bereiches
  - Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten lassen sich vergleichsweise einfach und anschaulich lösen
  - Differentiation und Integration im Zeitbereich gehen in einfache algebraische Operationen im Laplace-Bereich über
  - Faltungsintegral im Zeitbereich entspricht einem Produkt im Laplace-Bereich
  - Charakterisierung von linearen, zeitinvarianten Systemen mit sogenannten Übertragungsfunktionen
- Übertragungsfunktion entspricht weitgehend dem Begriff der Übertragungsfunktion aus der Wechselstromtechnik
- Komplexe Übertragungsfunktionen werden auch in der Regelungstechnik und Signalverarbeitung für die Beschreibung dynamischer Systeme und Übertragungssystemen eingesetzt

Laplace-Transformation

Grundlagen – Definitionsgleichung

- Definition der Laplace-Transformation

$$X(s) = \int_{0_-}^{\infty} x(t) \cdot e^{-s \cdot t}\, dt$$

mit der komplexen Variable

$$s = \delta + j \cdot \omega$$

- Transformation wird mit einem großen $\mathcal{L}$ dargestellt

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = X(s) = \int_{0_-}^{\infty} x(t) \cdot e^{-s \cdot t}\, dt$$

- Paar aus Zeit- oder Originalfunktion x(t) und Laplace-Transformierter X(s) wird als Korrespondenz bezeichnet und über ein Hantel-Symbol dargestellt

$$x(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\; X(s)$$

Laplace-Transformation

Grundlagen – Laplace-Transformierte der kausalen Rechteckfunktion

- Rechteckfunktion mit der Gleichung

$$x(t) = \sigma(t) - \sigma(t - t_0)$$

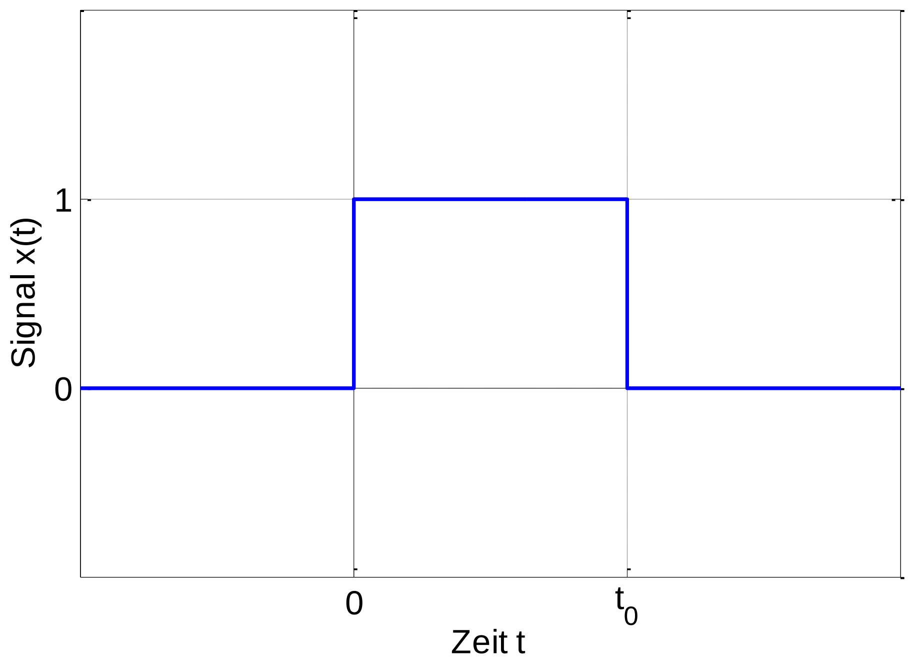
- Einsetzen in die Definitionsgleichung

$$X(s) = \int_{0_-}^{\infty} x(t) \cdot e^{-s \cdot t}\, dt = \int_{0_-}^{\infty} \left(\sigma(t) - \sigma(t - t_0)\right) \cdot e^{-s \cdot t}\, dt$$

- Kausale Rechteckfunktion ist nur von 0 bis t_0 von null verschieden

$$X(s) = \int_{0_-}^{\infty} \left(\sigma(t) - \sigma(t - t_0)\right) \cdot e^{-s \cdot t}\, dt = \int_{0_-}^{t_0} 1 \cdot e^{-s \cdot t}\, dt$$

- Uneigentliches Integral geht wegen zeitlicher Begrenzung in ein endliches Integral über



Laplace-Transformation

Grundlagen – Laplace-Transformierte der kausalen Rechteckfunktion

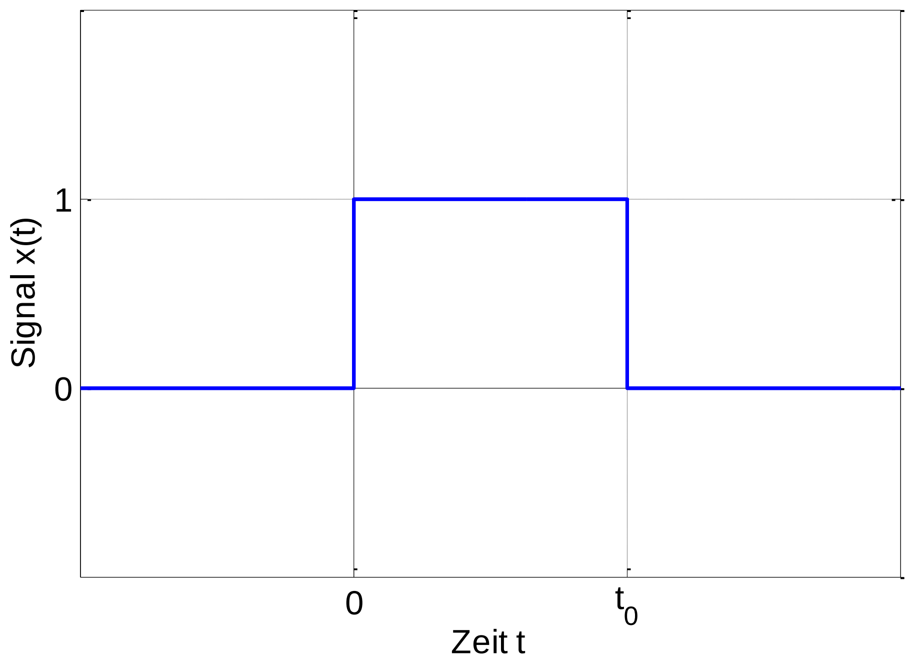
- Stammfunktion der Exponentialfunktion

$$\int e^{a\cdot t}\ dt = \frac{1}{a}\cdot e^{a\cdot t}$$

- Einsetzen der Integrationsgrenzen führt zu der Laplace-Transformierten der kausalen Rechteckfunktion

$$X(s) = \int_{0_-}^{t_0} 1\cdot e^{-s\cdot t}\ dt = -\frac{1}{s}\cdot e^{-s\cdot t}\Big|_{0_-}^{t_0}$$

$$= -\frac{1}{s}\cdot e^{-s\cdot t_0} + \frac{1}{s}\cdot e^{-s\cdot 0_-} = \frac{1}{s}\cdot\left(1 - e^{-s\cdot t_0}\right)$$



Laplace-Transformation

Grundlagen – Laplace-Transformierte von Impulsfunktionen

- Definition Impulsfunktion

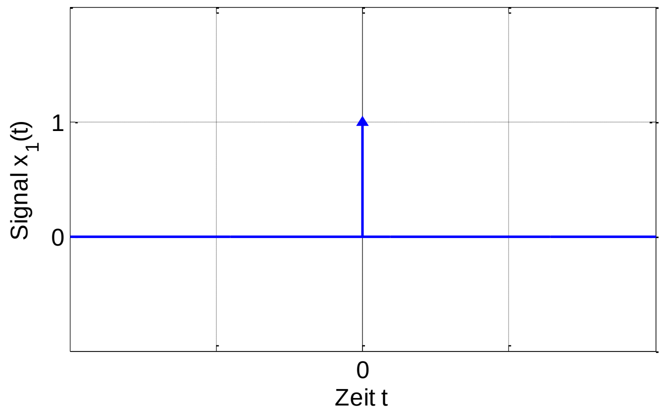
$$x_1(t) = \delta(t)$$

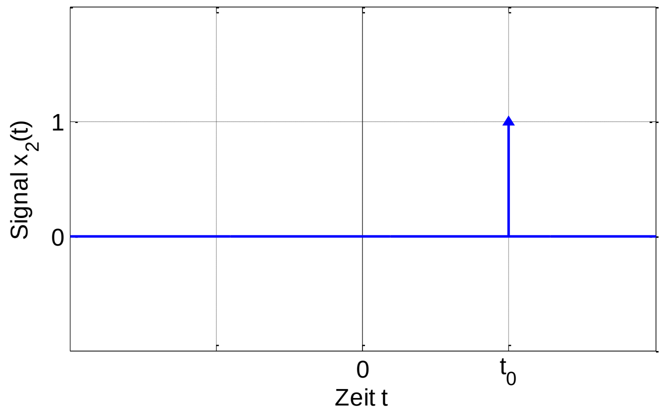
- Einsetzen der Sprungfunktion in die Definitionsgleichung führt mit der Ausblendeigenschaft der Impulsfunktion zu

$$X_1(s) = \int_{0_-}^{\infty} \delta(t) \cdot e^{-s \cdot t} \; dt$$

$$= e^{-s \cdot 0} \cdot \int_{0_-}^{\infty} \delta(t) \; dt = 1 \cdot \int_{0_-}^{\infty} \delta(t) \; dt = 1$$

- Impulsfunktion $\delta(t)$ besitzt die Laplace-Transformierte $X(s) = 1$





Laplace-Transformation

Grundlagen – Laplace-Transformierte von Impulsfunktionen

- Verschobene Impulsfunktion

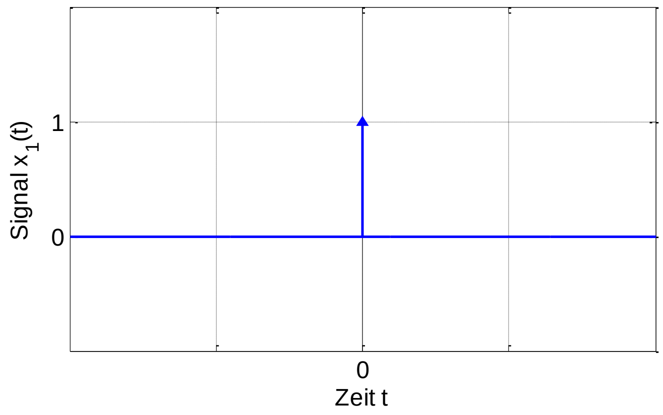
$$x_2(t) = \delta(t - t_0)$$

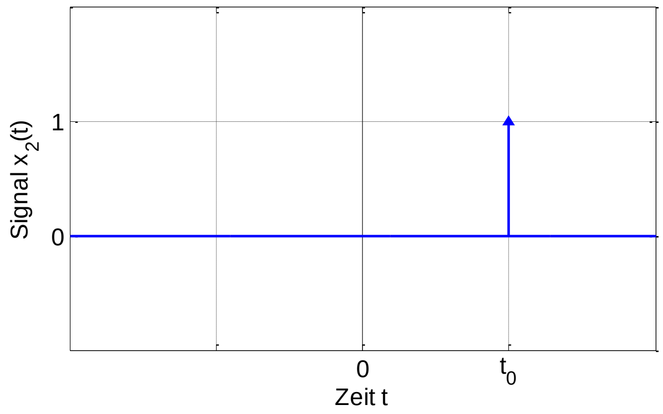
- Analog zur nicht verschobenen Impulsfunktion ergibt sich die Laplace-Transformierte

$$X_2(s) = \int_{0_-}^{\infty} \delta(t - t_0) \cdot e^{-s \cdot t}\, dt$$

$$= e^{-s \cdot t_0} \cdot \int_{0_-}^{\infty} \delta(t - t_0)\, dt = e^{-s \cdot t_0} \cdot \int_{0_-}^{\infty} \delta(t - t_0)\, dt = e^{-s \cdot t_0}$$

- Verschiebung der Impulsfunktion führt zu derselben Laplace-Transformierten multipliziert mit der Exponentialfunktion $e^{-s \cdot t_0}$





Laplace-Transformation

Grundlagen – Laplace-Transformierte der Sprungfunktion

- Sprungfunktion

$$x(t) = \sigma(t)$$

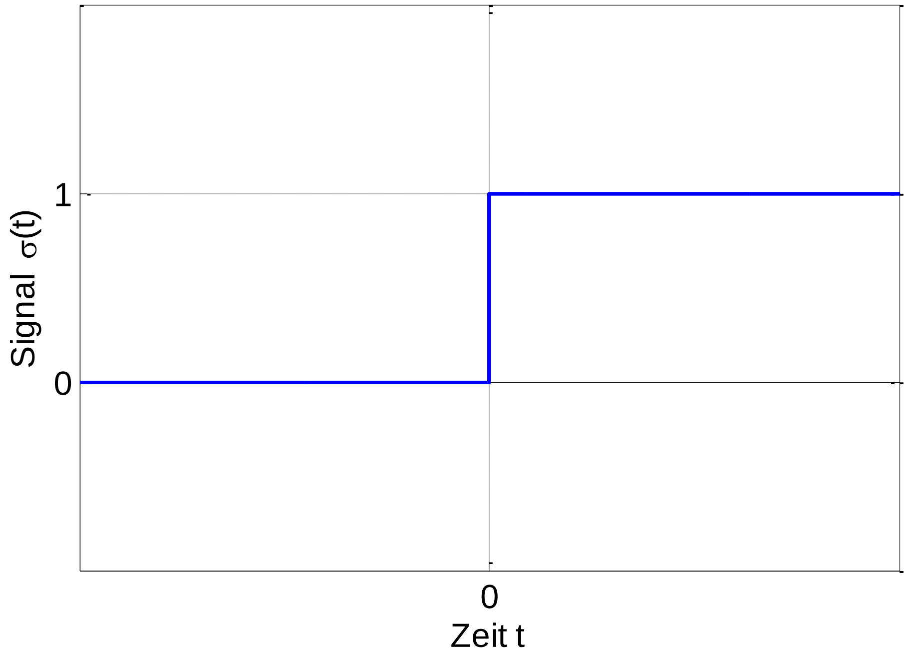
- Einsetzen der Sprungfunktion in die Definitions-gleichung für die Laplace-Transformation

$$X(s) = \int_{0_-}^{\infty} \sigma(t) \cdot e^{-s \cdot t}\ dt = \int_{0_-}^{\infty} 1 \cdot e^{-s \cdot t}\ dt = \int_{0_-}^{\infty} e^{-s \cdot t}\ dt$$

- Sprungfunktion ist zeitlich nicht begrenzt, Integral weist einen unendlichen Integrationsbereich auf

- Bilden der Stammfunktion und Einsetzen der Integrationsgrenzen führt zu

$$X(s) = -\frac{1}{s} \cdot e^{-s \cdot t}\Big|_{0_-}^{\infty} = -\lim_{t \to \infty} \frac{1}{s} \cdot e^{-s \cdot t} + \frac{1}{s} \cdot e^{-s \cdot 0_-} = \frac{1}{s} \cdot \left(1 - \lim_{t \to \infty} e^{-s \cdot t}\right)$$



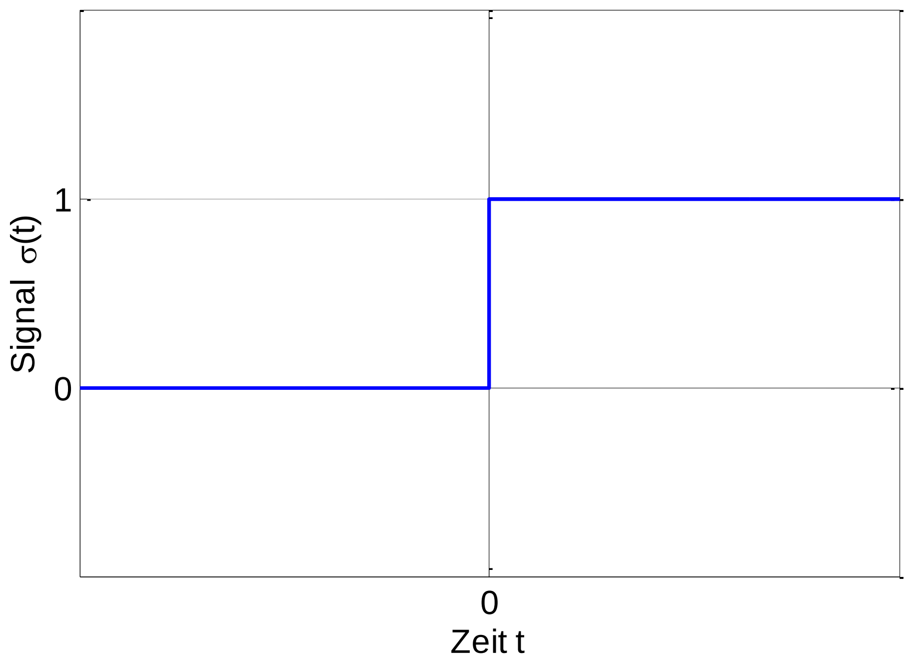
Laplace-Transformation

Grundlagen – Laplace-Transformierte der Sprungfunktion

- Zahl s ist eine komplexe Zahl $s = \delta + j \cdot \omega$
- Grenzwert existiert nur, wenn der Realteil δ der komplexen Zahl s positiv ist

$$X(s) = \frac{1}{s} \cdot \left(1 - \lim_{t \to \infty} e^{-s \cdot t}\right) = \frac{1}{s} \cdot \left(1 - \lim_{t \to \infty} e^{-(\delta + j \cdot \omega) \cdot t}\right)$$

$$= \frac{1}{s} \cdot \left(1 - \lim_{t \to \infty} e^{-\delta \cdot t} \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t}\right) = \frac{1}{s} \cdot (1 - 0) = \frac{1}{s}$$



- Sprungfunktion hat nur für den Bereich der s-Ebene mit $\delta > 0$ die Laplace-Transformierte $X(s) = 1/s$
- Im Bereich der s-Ebene mit $\delta \leq 0$ besitzt die Sprungfunktion keine Laplace-Transformierte, da das Laplace-Integral nicht konvergiert
- Zu einer Laplace-Transformierten gehört immer ein Konvergenzbereich

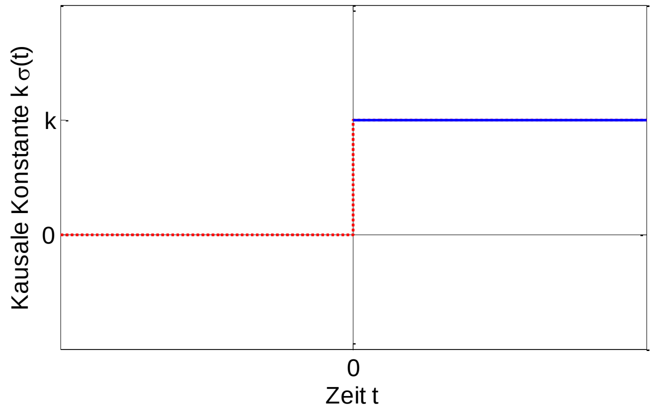
Laplace-Transformation

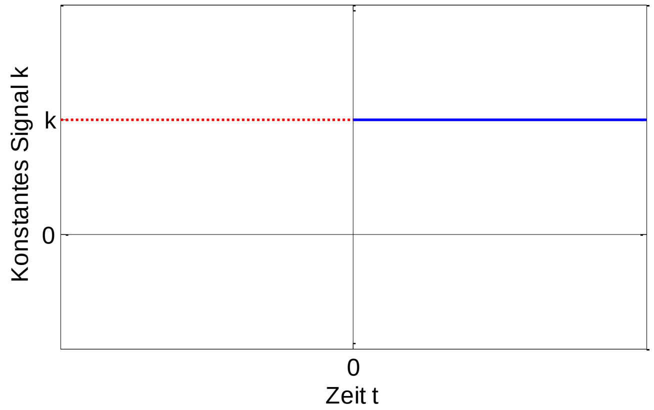
Grundlagen – Laplace-Transformierte von Konstanten und kausalen Konstanten

- Laplace-Transformierte einer Konstanten x(t) = k ergibt sich analog zu der Berechnung der Laplace-Transformierten der Sprungfunktion zu

$$X(s) = \int_{0_-}^{\infty} k \cdot e^{-s \cdot t}\, dt = k \cdot \int_{0_-}^{\infty} e^{-s \cdot t}\, dt = \frac{k}{s}$$

- Laplace-Transformierten einer Konstante k und einer mit dem Faktor k multiplizierten Sprungfunktion $k \cdot \sigma(t)$ unterscheiden sich weder im Ergebnis noch im Konvergenzbereich
- Ursache ist die einseitige Laplace-Transformation, deren Integrationsbereich erst bei t = 0 beginnt
- Konstanten werden im Zusammenhang mit der Laplace-Transformation auch als kausale Konstanten bezeichnet, also als Konstanten, die erst für $t \geq 0$ von null verschieden sind





Laplace-Transformation

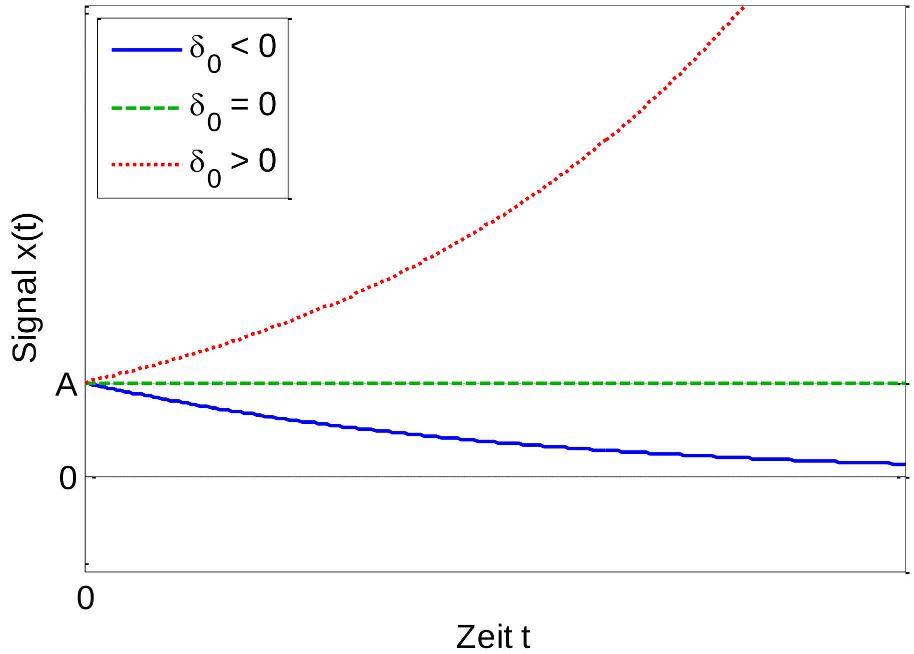
Grundlagen – Laplace-Transformierte der kausalen Exponentialfunktion

- Kausale Exponentialfunktion ist für t < 0 null, zum Zeitpunkt t = 0 springt sie auf den Wert eins
- Je nach Koeffizient δ_0 steigt die Exponentialfunktion an, bleibt konstant oder fällt ab

$$x(t) = e^{\delta_0 \cdot t} \cdot \sigma(t)$$

- Einsetzen in die Definitionsgleichung für die Laplace-Transformation

$$X(s) = \int_{0_-}^{\infty} e^{\delta_0 \cdot t} \cdot \sigma(t) \cdot e^{-s \cdot t}\, dt = \int_{0_-}^{\infty} e^{(\delta_0 - s)\cdot t}\, dt$$



- Lösung des uneigentlichen Integrals

$$X(s) = \frac{1}{\delta_0 - s} \cdot e^{(\delta_0 - s)\cdot t}\Big|_{0_-}^{\infty} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{\delta_0 - s} \cdot e^{(\delta_0 - s)\cdot t} - \frac{1}{\delta_0 - s} \cdot e^{(\delta_0 - s)\cdot 0_-} = \frac{1}{s - \delta_0} \cdot \left(1 - \lim_{t\to\infty} e^{-(s-\delta_0)\cdot t}\right)$$

Laplace-Transformation

Grundlagen – Laplace-Transformierte der kausalen Exponentialfunktion

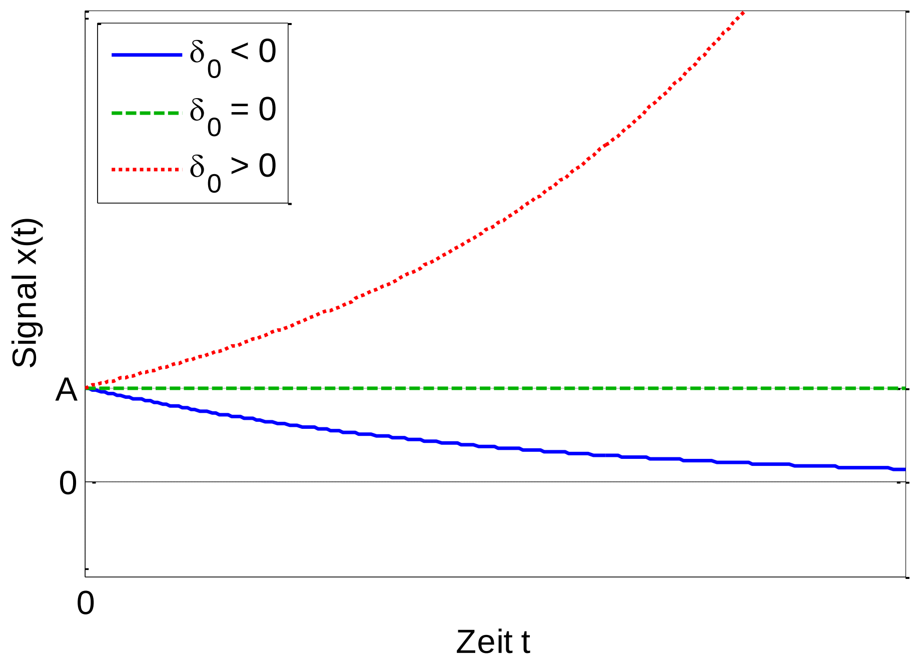
- Grenzwert existiert nur, wenn Re(s - δ_0) > 0 ist, in dem Fall gilt

$$X(s) = \frac{1}{s-\delta_0} \cdot \left(1 - \lim_{t\to\infty} e^{-(s-\delta_0)\cdot t}\right) = \frac{1}{s-\delta_0}$$

- Kausale Exponentialfunktion hat demnach für den Bereich der s-Ebene mit Re(s - δ_0) > 0 die Laplace-Transformierte X(s) = 1/(s - δ_0)

- In dem übrigen Bereich der s-Ebene besitzt die kausale Exponentialfunktion keine Laplace-Transformierte, da das Laplace-Integral nicht konvergiert

- Beispiel der kausalen Exponentialfunktion führt zu der Frage der Konvergenz der Laplace-Transformation



Laplace-Transformation

Grundlagen – Existenz der Laplace-Transformierten

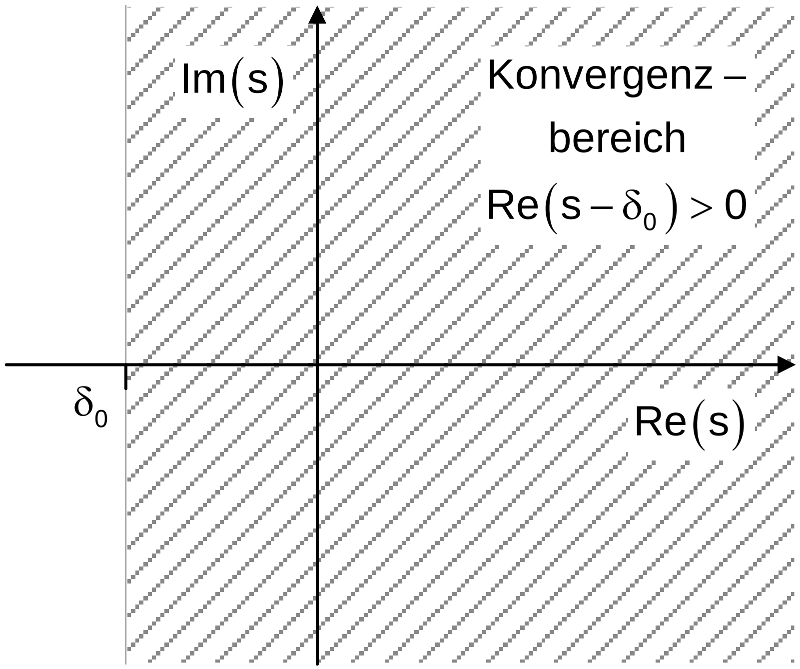
- Laplace-Transformation beruht auf der Auswertung eine uneigentlichen Integrals

$$X(s) = \int_{0_-}^{\infty} x(t) \cdot e^{-s \cdot t}\, dt$$

- Laplace-Transformierte ist nur definiert, wenn das Integral konvergiert
- Bedingung ist erfüllt, wenn x(t) stückweise stetig ist und wenn |x(t)| für $t \to \infty$ nicht schneller als eine Exponentialfunktion wächst

$$\left| x(t) \right| \leq k \cdot e^{\delta_0 \cdot t}$$

- Für Re(s) > δ_0 ist das zugehörige Laplace-Integral absolut konvergent, Laplace-Transformierte existiert



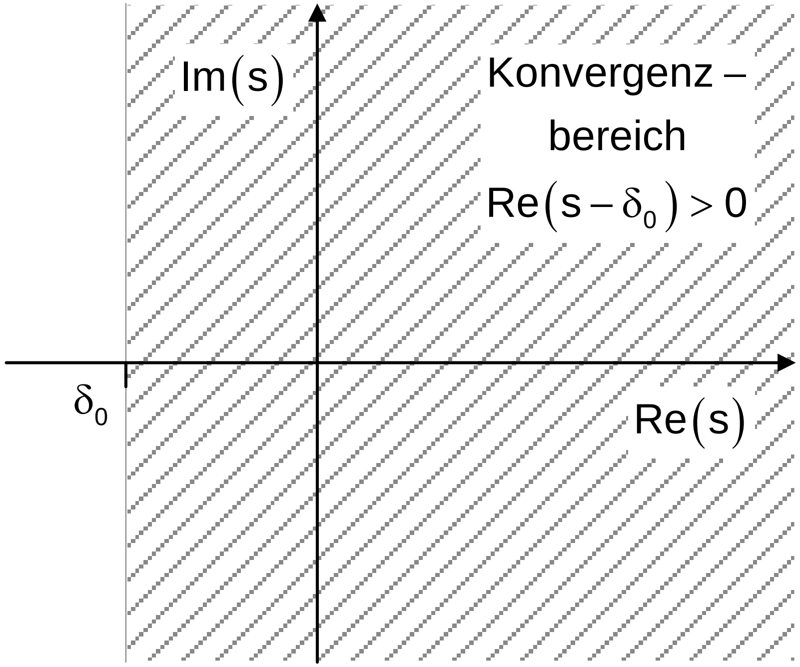
Laplace-Transformation

Grundlagen – Existenz der Laplace-Transformierten

- Einsetzen in das Laplace-Integral führt zu

$$X(s) = \int_{0_-}^{\infty} e^{\delta_0 \cdot t} \cdot \sigma(t) \cdot e^{-s \cdot t}\, dt = \int_{0_-}^{\infty} e^{(\delta_0 - s)\cdot t}\, dt = \frac{1}{\delta_0 - s} \cdot e^{-(s-\delta_0)\cdot t} \Big|_{0_-}^{\infty}$$

$$= \lim_{t \to \infty} \frac{1}{\delta_0 - s} \cdot e^{-(s-\delta_0)\cdot t} - \frac{1}{\delta_0 - s}$$

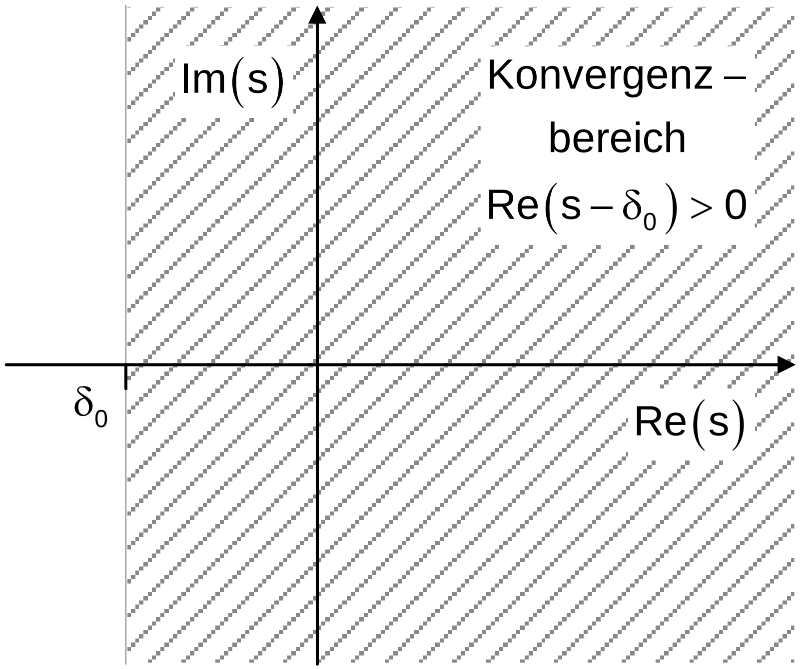


- Fallunterscheidung
  - Re(s - δ_0) < 0: Exponentialfunktion strebt gegen unendlich, Integral ist nicht konvergent, Laplace-Transformierte existiert nicht
  - Re(s - δ_0) > 0: Exponentialfunktion strebt nach null, Integral ist konvergent, Laplace-Transformierte existiert

Laplace-Transformation

Grundlagen – Existenz der Laplace-Transformierten

- Für den grau hinterlegten Bereich der s-Ebene ist das Laplace-Integral konvergent
- Laplace-Transformierte X(s) einer Funktion x(t) existiert, wenn |x(t)| für $t \to \infty$ nicht schneller wächst als eine Exponentialfunktion
- In systemtheoretisch interessanten Fällen kann von der Konvergenz des Laplace-Integrals zumindest in einem Teil der s-Ebene ausgegangen werden
- Konvergenzbereich der Laplace-Transformation ist deshalb für die Berechnung technisch interessanteR Fälle von untergeordneter Bedeutung
- Konvergenzbereich der Laplace-Transformation bei der Fourier-Transformation wieder wichtig



Laplace-Transformation

Grundlagen – Pollage und kausale Exponentialfunktion

- Kausale Exponentialfunktion

  $$x(t) = e^{\lambda \cdot t} \cdot \sigma(t)$$

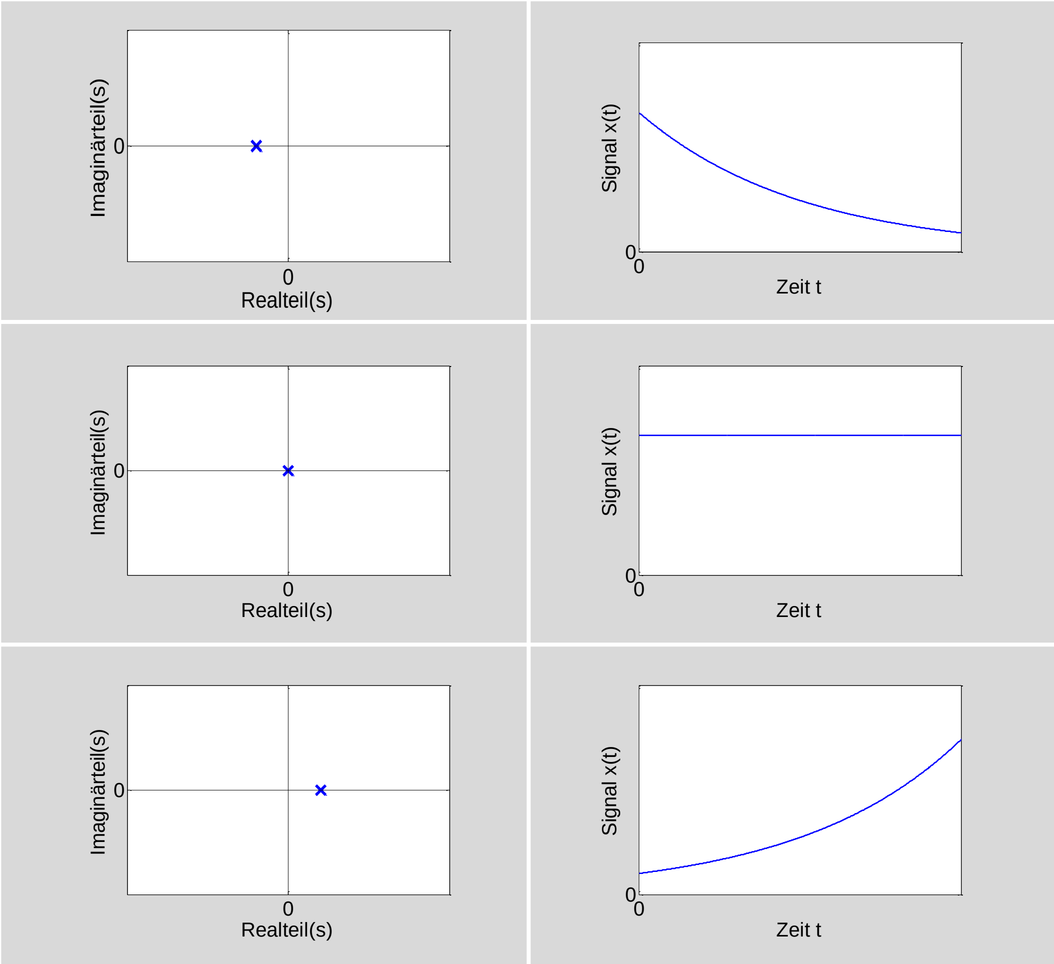
- Pol der Laplace-Transformierten

  $$X(s) = \frac{1}{s-\lambda}$$

  in der komplexen s-Ebene

  $$s = \lambda$$

- Lage des Poles bzw. der Pole in der s-Ebene kann dem Signalverhalten zugeordnet werden



Laplace-Transformation

Grundlagen – Pollage und kausale Exponentialfunktion

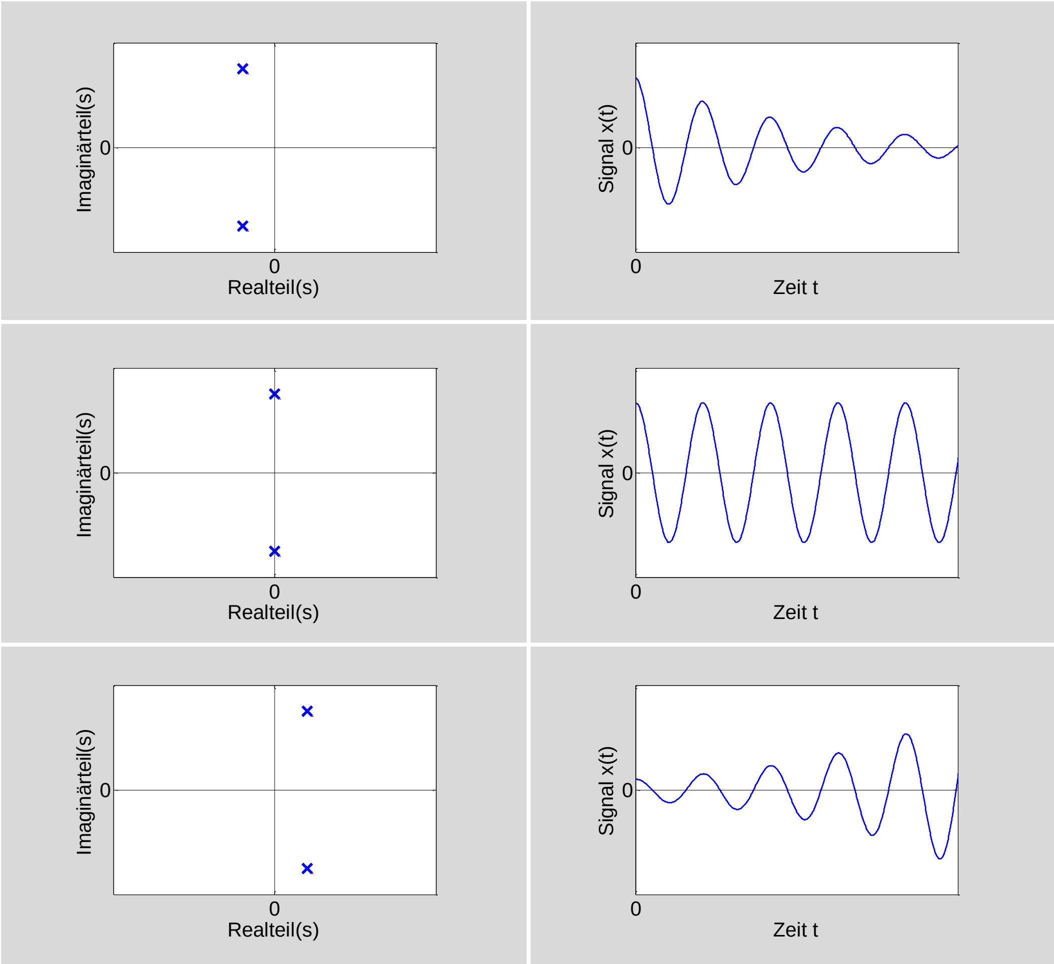
- Cosinus-Funktionen mit exponentiell abklingender Amplitude können als Summe zweier Exponentialfunktionen mit jeweils konjugiert komplexen Koeffizienten λ dargestellt werden

$$x(t) = A \cdot e^{\delta_0 \cdot t} \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) \cdot \sigma(t)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot A \cdot e^{\delta_0 \cdot t} \cdot \left(e^{j \cdot \omega_0 \cdot t} + e^{-j \cdot \omega_0 \cdot t}\right) \cdot \sigma(t)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot A \cdot \left(e^{(\delta_0 + j \cdot \omega_0) \cdot t} + e^{(\delta_0 - j \cdot \omega_0) \cdot t}\right) \cdot \sigma(t)$$

- Jede Exponentialfunktion führt zu einem Pol in der komplexen Ebene, es ergeben sich konjugiert komplexe Polpaare
- Realteil δ_0 beschreibt das Verhalten der Amplitude, Imaginärteil ω_0 repräsentiert die Kreisfrequenz, mit der das Signal schwingt



Laplace-Transformation

Übungsaufgabe: Grundlagen – Definitionsgleichung

- Transformieren Sie folgende Signale in den Laplace-Bereich und geben Sie den Konvergenzbereich der Laplace-Transformierten an

$$x(t) = t \cdot \sigma(t)$$

$$x(t) = U_0 \cdot \sin(\omega_0 \cdot t) \cdot \sigma(t)$$

$$x(t) = \begin{cases} U_0 \cdot \sin(\omega_0 \cdot t) & \text{für } 0 \leq t \leq \dfrac{2 \cdot \pi}{\omega_0} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$