Hochschule Karlsruhe
Technik und Wirtschaft
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES
Näher dran.

EIT Fakultät für Elektro- und Informationstechnik

Systemtheorie

Vorlesung 10: Eigenschaften der Laplace-Transformation

Fakultät für Elektro- und Informationstechnik, Manfred Strohrmann

Laplace-Transformation

Eigenschaften – Einleitung

- Berechnung von Laplace-Transformierten kann über die Auswertung des Laplace-Integrals erfolgen, Weg ist jedoch oft aufwendig
- In der Praxis werden bereits berechnete Korrespondenzen verwendet, um Signale in den Laplace-Bereich zu transformieren
- Rechenregeln der Laplace-Transformation zu nutzen, um auf standardisierte Ausdrücke zu kommen.
- Rechenregeln werden im Folgenden hergeleitet und zusammengefasst, dabei wird davon ausgegangen, dass die Signale x(t) kausale Signale sind
- Herleitungen basieren alle auf der Integralrechnung, es werden nur wesentliche Rechenregeln hergeleitet, Herleitung der übrigen Rechenregeln in Skript zur Vorlesung
- Nach Einführung der Rechenregeln werden bekannte Korrespondenzen zur Berechnung der Laplace-Transformierten genutzt, das Laplace-Integral wird nur noch in Ausnahmefällen verwendet

Laplace-Transformation

Eigenschaften – Linearitätsprinzip

- Laplace-Transformation ist eine lineare Transformation, Linearkombination zweier Funktionen kann im Laplace-Bereich über dieselbe Linearkombination der Laplace-Transformierten dargestellt werden

$$\mathcal{L}\left\{\nu_1 \cdot x_1(t) + \nu_2 \cdot x_2(t)\right\} = \nu_1 \cdot X_1(s) + \nu_2 \cdot X_2(s)$$

- Herleitung des Linearitätsprinzips

$$\int_{0_-}^{\infty} \left(\nu_1 \cdot x_1(t) + \nu_2 \cdot x_2(t)\right) \cdot e^{-s \cdot t}\, dt = \nu_1 \cdot \int_{0_-}^{\infty} x_1(t) \cdot e^{-s \cdot t}\, dt + \nu_2 \cdot \int_{0_-}^{\infty} x_2(t) \cdot e^{-s \cdot t}\, dt = \nu_1 \cdot X_1(s) + \nu_2 \cdot X_2(s)$$

- Beispiel: Exponentiell abklingende harmonische Schwingung kann als Summe zweier komplexer Exponentialfunktionen dargestellt werden

$$x(t) = A \cdot e^{\delta \cdot t} \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) \cdot \sigma(t) = \frac{1}{2} \cdot A \cdot e^{\delta \cdot t} \cdot \left(e^{j \cdot \omega_0 \cdot t} + e^{-j \cdot \omega_0 \cdot t}\right) \cdot \sigma(t) = \frac{1}{2} \cdot A \cdot \left(e^{(\delta + j \cdot \omega_0) \cdot t} + e^{(\delta - j \cdot \omega_0) \cdot t}\right) \cdot \sigma(t)$$

- Anwendung der Linearitätsregel

$$X(s) = \frac{1}{2} \cdot A \cdot \left(\frac{1}{s - (\delta + j \cdot \omega_0)} + \frac{1}{s - (\delta - j \cdot \omega_0)}\right) = A \cdot \frac{s - \delta}{(s - \delta)^2 + \omega_0^2}$$

Laplace-Transformation

Eigenschaften – Verschiebungsregel

- Verschiebung einer Zeitfunktion um t_0 nach rechts kann durch $x(t - t_0)$ mit $t_0 > 0$ dargestellt werden, im Laplace-Bereich gilt

$$\mathcal{L}\left\{x\left(t-t_0\right)\right\} = e^{-s\cdot t_0}\cdot X\left(s\right)$$

- Beweis des Verschiebungssatzes über Definitionsgleichung der Laplace-Transformation

$$\int_{0_-}^{\infty} x\left(t-t_0\right)\cdot e^{-s\cdot t}\, dt = \int_{0_-}^{\infty} x\left(t-t_0\right)\cdot e^{-s\cdot(t-t_0)}\cdot e^{-s\cdot t_0}\, dt = e^{-s\cdot t_0}\cdot\int_{0_-}^{\infty} x\left(t-t_0\right)\cdot e^{-s\cdot(t-t_0)}\, dt = e^{-s\cdot t_0}\cdot\int_{-t_0}^{\infty} x\left(t\right)\cdot e^{-s\cdot t}\, dt$$

$$= e^{-s\cdot t_0}\cdot\int_{-t_0}^{0_-} x\left(t\right)\cdot e^{-s\cdot t}\, dt + e^{-s\cdot t_0}\cdot\int_{0_-}^{\infty} x\left(t\right)\cdot e^{-s\cdot t}\, dt = e^{-s\cdot t_0}\cdot\int_{0_-}^{\infty} x\left(t\right)\cdot e^{-s\cdot t}\, dt$$

- Beispiel kausale Rechteckfunktion

$$x\left(t\right) = \sigma\left(t\right) - \sigma\left(t-t_0\right)$$

Berechnen Sie die Laplace-Transformierte mit der Verschiebungsregel

Eigenschaften – Integrationsregel

- Besitzt die Zeitfunktion x(t) die Laplace-Transformierte X(s), so gilt für ihre Stammfunktion die Beziehung

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t x(\tau)\, d\tau\right\} = \frac{1}{s}\cdot X(s)$$

- Beweis durch Einsetzen des Integralausdrucks in die Definitionsgleichung der Laplace-Transformation

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t x(\tau)\, d\tau\right\} = \int_{0_-}^{\infty}\int_0^t x(\tau)\, d\tau\cdot e^{-s\cdot t}\, dt = -\frac{1}{s}\cdot e^{-s\cdot t}\cdot\int_0^t x(\tau)\, d\tau\Bigg|_{0_-}^{\infty} + \frac{1}{s}\cdot\int_{0_-}^{\infty} x(t)\cdot e^{-s\cdot t}\, dt$$

- Für t = 0 wird der erste Summand zu null, weil die Integrationsgrenzen des Integrals identisch sind, für $t \to \infty$ wird der erste Summand wegen der Exponentialfunktion zu null, wenn s nur weit genug in der positiven Halbebene liegt und x(t) nicht stärker wächst als eine Exponentialfunktion

- Vereinfachung des Ausdrucks

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t x(\tau)\, d\tau\right\} = \frac{1}{s}\cdot\int_{0_-}^{\infty} x(t)\cdot e^{-s\cdot t}\, dt = \frac{1}{s}\cdot X(s)$$

Laplace-Transformation

Beispiel: Eigenschaften – Integrationsregel

- Integral der kausalen Exponentialfunktion

  $$x(t) = e^{\lambda \cdot t} \cdot \sigma(t)$$

  mit der Laplace-Transformierten

  $$X(s) = \frac{1}{s - \lambda}$$

- Bei der Berechnung von Sprungantworten ist die Zeitfunktion von Interesse, die zu der Laplace-Transformierten Y(s) gehört

  $$Y(s) = \frac{1}{s \cdot (s - \lambda)}$$

- Zugehörige Zeitfunktion kann mit Hilfe der Integrationsregel bestimmt werden zu

  $$y(t) = \int_{0_-}^{t} e^{\lambda \cdot \tau} \cdot \sigma(\tau)\, d\tau = \int_{0_-}^{t} e^{\lambda \cdot \tau}\, d\tau = \frac{1}{\lambda} \cdot e^{\lambda \cdot \tau} \Big|_{0_-}^{t} = \frac{1}{\lambda} \cdot \left(e^{\lambda \cdot t} - 1\right)$$

Beispiel: Eigenschaften – Integrationsregel

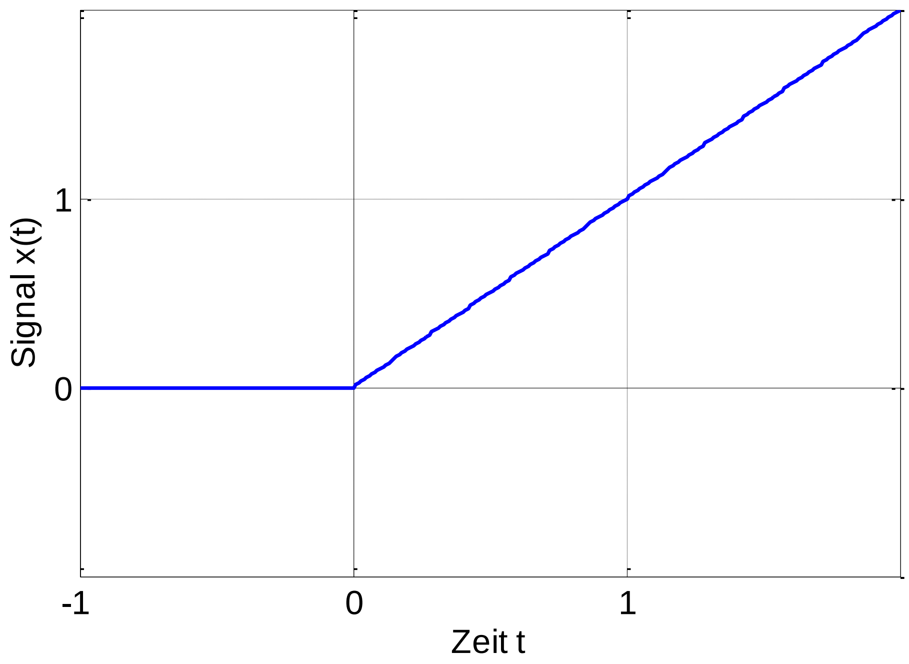
- Rampenfunktion kann als Integral der Sprungfunktion dargestellt werden

$$x(t) = \int_0^t \sigma(\tau)\, d\tau$$

- Mit Integrationsregel berechnet sich die Laplace-Transformierte der Rampenfunktion zu

$$X(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{s^2}$$

- Beispiele zeigen
  - Rechenweg wird durch den Einsatz der Rechenregeln stark verkürzt
  - Auswertung des uneigentlichen Integrals entfällt



Laplace-Transformation

Eigenschaften – Differentiationsregel

- Besitzt die Zeitfunktion x(t) die Laplace-Transformierte X(s), so gilt für ihre verallgemeinerte Ableitung die Beziehung

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dx}{dt}\right\} = s \cdot X(s) - x(0_-)$$

- Herleitung der Differentiationsregel zunächst für stetige Funktionen

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dx}{dt}\right\} = \int_{0_-}^{\infty} \frac{dx}{dt} \cdot e^{-s \cdot t}\, dt = x(t) \cdot e^{-s \cdot t}\Big|_{0_-}^{\infty} + s \cdot \int_{0_-}^{\infty} x(t) \cdot e^{-s \cdot t}\, dt$$

- Erster Summand geht für t → ∞ gegen null, wenn s nur weit genug in der positiven Halbebene liegt und x(t) nicht stärker wächst als eine Exponentialfunktion

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dx}{dt}\right\} = -x(0_-) + s \cdot X(s) = s \cdot X(s) - x(0_-)$$

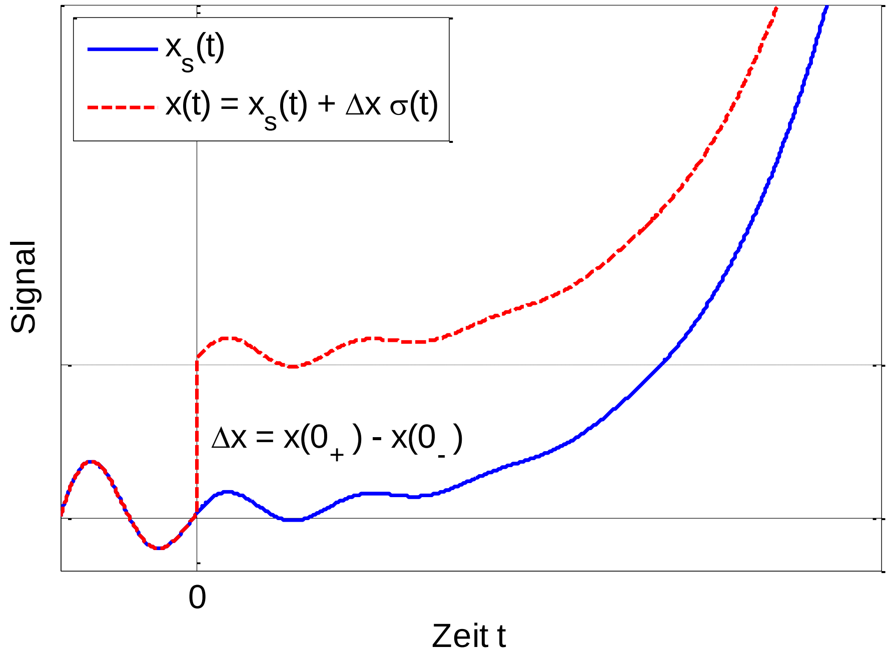
Laplace-Transformation

Eigenschaften – Differentiationsregel

- Bei stetigen Funktionen x(t) ist der rechtsseitige Grenzwert $x(0_+)$ und der linksseitige Grenzwert $x(0_-)$ identisch
- Allgemeine Form der Ableitungsregel

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dx}{dt}\right\} = s \cdot X(s) - x(0_-)$$

- Erweiterung für mehrfache Ableitung durch wiederholte Anwendung
- Regel ist für praktische Anwendungen der Laplace-Transformation die wichtigste
- Differentiation im Zeitbereich geht in eine Multiplikation im Laplace-Bereich über, sie ermöglicht einfache Lösung von linearen Differentialgleichungen mit Anfangsbedingungen



Laplace-Transformation

Beispiel: Eigenschaften – Differentiationsregel

- Lösung einer linearen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten und Anfangs-bedingungen am Beispiel RC-Netzwerk

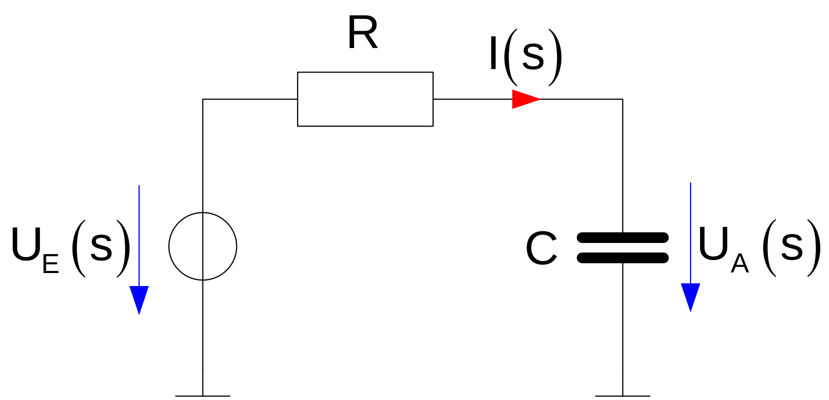
$$R \cdot C \cdot \frac{du_A}{dt} + u_A(t) = u_E(t)$$

- Transformation der Differentialgleichung in den Laplace-Bereich unter Verwendung der Differentiationsregel

$$R \cdot C \cdot \left(s \cdot U_A(s) - u_A(0)\right) + U_A(s) = U_E(s)$$

- Eingangssignal ist ein Sprung von 5 V, Darstellung im Laplace-Bereich

$$U_E(s) = \frac{5\ \mathrm{V}}{s}$$



Laplace-Transformation

Beispiel: Eigenschaften – Differentiationsregel

- Einsetzen in Systembeschreibung im Laplace-Bereich

$$R \cdot C \cdot \left(s \cdot U_A(s) - u_A(0) \right) + U_A(s) = \frac{5\ V}{s}$$

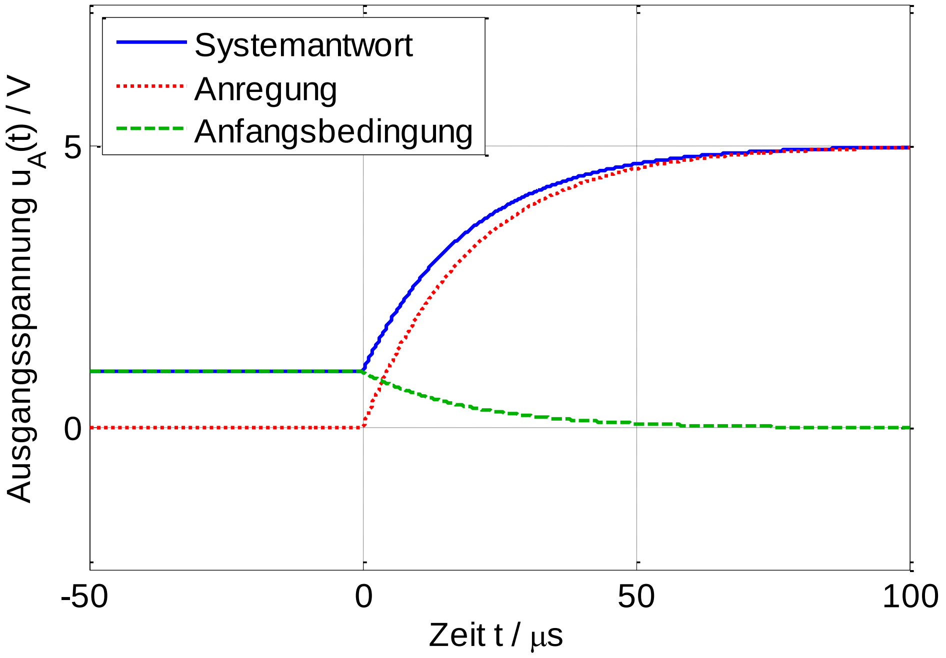
und Auflösen nach der gesuchten Größe $U_a(s)$

$$U_A(s) = \frac{5\ V}{s \cdot (1 + R \cdot C \cdot s)} + \frac{R \cdot C}{1 + R \cdot C \cdot s} \cdot u_A(0)$$

- Ausgangsspannung $u_a(t)$ ergibt sich mit den berechneten Korrespondenzen zu

$$u_A(t) = 5\ V \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{R \cdot C}} \right) \cdot \sigma(t) + u_A(0) \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}} \cdot \sigma(t)$$

- Ergebnis stimmt mit dem Ergebnis der Vier-Schritt-Methode überein



Laplace-Transformation

Eigenschaften – Faltungsregel

- Berechnung von Systemantworten im Zeitbereich über Faltungsoperation,
  Faltung entspricht im Laplace-Bereich das Produkt der beiden Laplace-Transformierten

$$\mathcal{L}\left\{g(t) * u(t)\right\} = G(s) \cdot U(s)$$

- Herleitung der Rechenregel über das Produkt der beiden Laplace-Transformierten

$$G(s) \cdot U(s) = \int_{0_-}^{\infty} u(\upsilon) \cdot e^{-s\cdot\upsilon}\, d\upsilon \cdot \int_{0_-}^{\infty} g(\tau) \cdot e^{-s\cdot\tau}\, d\tau = \int_{0_-}^{\infty}\int_{0_-}^{\infty} u(\upsilon) \cdot e^{-s\cdot\upsilon} \cdot g(\tau) \cdot e^{-s\tau}\, d\tau\, d\upsilon$$

$$= \int_{0_-}^{\infty} g(\tau) \cdot \int_{0_-}^{\infty} u(\upsilon) \cdot e^{-s\cdot(\upsilon+\tau)}\, d\upsilon\, d\tau$$

- Substitution $\upsilon + \tau = t$ ergibt

$$G(s) \cdot U(s) = \int_{0_-}^{\infty} g(\tau) \cdot \int_{0_-}^{\infty} u(\upsilon) \cdot e^{-s\cdot(\upsilon+\tau)}\, d\upsilon\, d\tau = \int_{0_-}^{\infty} g(\tau) \cdot \int_{\tau}^{\infty} u(t-\tau) \cdot e^{-s\cdot t}\, dt\, d\tau$$

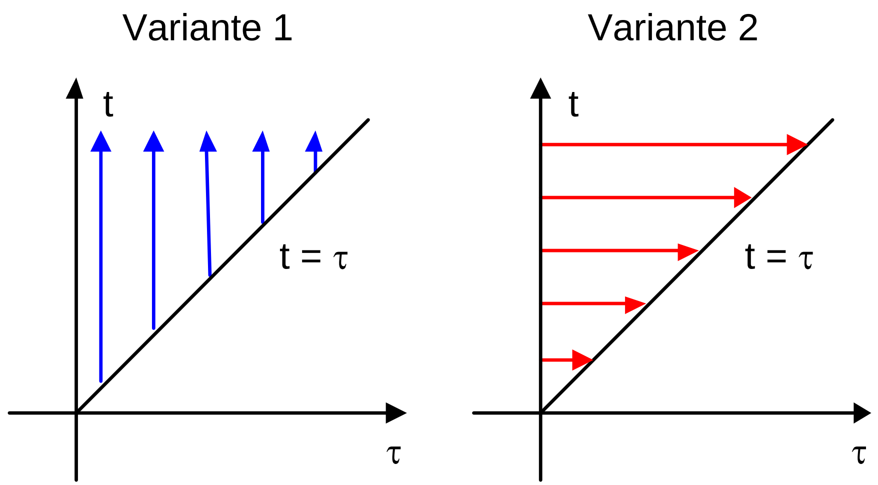
Laplace-Transformation

Eigenschaften – Faltungsregel

- Darstellung des Integrationsgebietes

$$G(s)\cdot U(s)=\int_{0_-}^{\infty} g(\tau)\cdot\int_{\tau}^{\infty} u(t-\tau)\cdot e^{-s\cdot t}\ dt\ d\tau$$

- Vertauschen der Integrationsreihenfolge



$$G(s)\cdot U(s)=\int_{0_-}^{\infty} g(\tau)\cdot\int_{\tau}^{\infty} u(t-\tau)\cdot e^{-s\cdot t}\ dt\ d\tau$$

$$=\int_{0_-}^{\infty}\int_{0_-}^{t} u(t-\tau)\cdot g(\tau)\cdot e^{-s\cdot t}\ d\tau\ dt=\int_{0_-}^{\infty}\int_{0_-}^{t} u(t-\tau)\cdot g(\tau)\ d\tau\cdot e^{-s\cdot t}\ dt$$

$$=\mathcal{L}\left\{\int_{0}^{t} u(t-\tau)\cdot g(\tau)\ d\tau\right\}=\mathcal{L}\{u(t)*g(t)\}=\mathcal{L}\{g(t)*u(t)\}$$

- Faltungsregel wird bei der Diskussion von LTI-Systemen im Laplace-Bereich erneut aufgegriffen, sie führt zu der Systembeschreibung mit Übertragungsfunktionen

Laplace-Transformation

Eigenschaften – Anfangswertsatz

- Anfangswertsatz erlaubt die Berechnung des Grenzwertes $x(0_-)$ mit Hilfe der Laplace-Transformation

$$x(0_+) = \lim_{s\to\infty} s \cdot X(s)$$

- Beweis des Anfangswertsatzes ergibt sich aus der Laplace-Transformierten der Ableitung

$$\int_{0_-}^{\infty} \frac{dx}{dt} \cdot e^{-s\cdot t}\, dt = x(t) \cdot e^{-s\cdot t}\Big|_{0_-}^{\infty} - \int_{0_-}^{\infty} -s \cdot x(t) \cdot e^{-s\cdot t}\, dt = \lim_{t\to\infty} x(t) \cdot e^{-s\cdot t} - x(0_-) \cdot e^{-s\cdot 0_-} + s \cdot \int_{0_-}^{\infty} x(t) \cdot e^{-s\cdot t}\, dt$$

- Für Re(s) > 0 wird die Exponentialfunktion zu null, Integral auf der rechten Seite entspricht der Definitionsgleichung für X(s)

$$\int_{0_-}^{\infty} \frac{dx}{dt} \cdot e^{-s\cdot t}\, dt = s \cdot \int_{0_-}^{\infty} x(t) \cdot e^{-s\cdot t}\, dt - x(0_-) = s \cdot X(s) - x(0_-)$$

- Signal x(t) muss an der Stelle t = 0 nicht stetig sein, x(t) wird in einen stetigen Teil $x_S(t)$ und einen Sprung an der Stelle t = 0 zerlegt

$$x(t) = x_S(t) + \left(x(0_+) - x(0_-)\right) \cdot \sigma(t) = x_S(t) + \Delta x \cdot \sigma(t)$$

Laplace-Transformation

Eigenschaften – Anfangswertsatz

- Damit ergibt sich für die linke Seite

$$\int_{0_-}^{\infty} \frac{dx}{dt} \cdot e^{-s \cdot t}\, dt = \int_{0_-}^{\infty} \frac{dx_S}{dt} \cdot e^{-s \cdot t}\, dt + \int_{0_-}^{\infty} \Delta x \cdot \delta(t) \cdot e^{-s \cdot t}\, dt = \int_{0_-}^{\infty} \frac{dx_S}{dt} \cdot e^{-s \cdot t}\, dt + \Delta x \cdot \int_{0_-}^{\infty} \delta(t) \cdot e^{-s \cdot t}\, dt$$

- Signal $x_S(t)$ ist stetig und weist keine Singularitäten auf, Integral ist für den Grenzwert $s \to \infty$ null, mit der Ausblendeigenschaft der Impulsfunktion ergibt sich

$$\int_{0_-}^{\infty} \frac{dx_S}{dt} \cdot e^{-s \cdot t}\, dt + \Delta x \cdot \int_{0_-}^{\infty} \delta(t) \cdot e^{-s \cdot t}\, dt = \Delta x = x(0_+) - x(0_-)$$

- Gleichsetzen der beiden Gleichungen

$$\int_{0_-}^{\infty} \frac{dx}{dt} \cdot e^{-s \cdot t}\, dt = s \cdot X(s) - x(0_-) = x(0_+) - x(0_-)$$

führt zum Anfangswertsatz

$$x(0_+) = \lim_{s \to \infty} s \cdot X(s)$$

Laplace-Transformation

Eigenschaften – Endwertsatz

- Endwertsatz erlaubt die Berechnung des Grenzwertes x(∞) mit Hilfe der Laplace-Transformierten

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{s\to 0} s\cdot X(s)$$

- Beweis ergibt sich aus der Laplace-Transformierter der Ableitung

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dx}{dt}\right\} = \int_{0_-}^{\infty} \frac{dx}{dt}\cdot e^{-s\cdot t}\,dt = s\cdot X(s) - x(0_-)$$

- Für den Grenzwert $s \to 0$ wird die Exponentialfunktion aus dem Integral zu eins

$$\lim_{s\to 0}\int_{0_-}^{\infty} \frac{dx}{dt}\cdot e^{-s\cdot t}\,dt = \int_{0_-}^{\infty} \frac{dx}{dt}\,dt = \lim_{t\to\infty} x(t) - x(0_-) = \lim_{s\to 0} s\cdot X(s) - x(0_-)$$

- Auflösen ergibt

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{s\to 0} s\cdot X(s)$$

- Endwert kann mit der Laplace-Transformation nur berechnet werden, wenn er existiert

Laplace-Transformation

Eigenschaften – Zusammenfassung wesentlicher Rechenregeln 1/3

Regel	Funktion x(t)	Laplace-Transformierte X(s)
Linearität	$\nu_1 \cdot x_1(t) + \nu_2 \cdot x_2(t)$	$\nu_1 \cdot X_1(s) + \nu_2 \cdot X_2(s)$
Zeitverschiebung nach rechts	$x(t - t_0)$	$e^{-s \cdot t_0} \cdot X(s)$
Modulation	$e^{\lambda \cdot t} \cdot x(t)$	$X(s - \lambda)$
Lineare Gewichtung	$t \cdot x(t)$	$-\frac{dX}{ds}$
Skalierung (c > 0)	$x(c \cdot t)$	$\frac{1}{c} \cdot X\left(\frac{s}{c}\right)$

Laplace-Transformation

Eigenschaften – Zusammenfassung wesentlicher Rechenregeln 2/3

Regel	Funktion x(t)	Laplace-Transformierte X(s)
Integration	$\int_0^t x(\tau)\, d\tau$	$\frac{1}{s} \cdot X(s)$
Ableitung	$\frac{dx}{dt}$	$s \cdot X(s) - x(0_-)$
n-fache Ableitung	$\frac{d^n x}{dt^n}$	$s^n \cdot X(s) - s^{n-1} \cdot x(0_-) - \ldots - \left.\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}\right\vert_{t=0_-}$
Multiplikation	$x(t) \cdot w(t)$	$X(s) * W(s)$

Laplace-Transformation

Eigenschaften – Zusammenfassung wesentlicher Rechenregeln 3/3

Regel	Funktion x(t)	Laplace-Transformierte X(s)
Faltung	$g(t) * u(t)$	$G(s) \cdot U(s)$
Anfangswert	$x(0_+)$	$\lim\limits_{s \to \infty} s \cdot X(s)$
Endwert	$\lim\limits_{t \to \infty} x(t)$	$\lim\limits_{s \to 0} s \cdot X(s)$

Laplace-Transformation

Eigenschaften – Zusammenfassung wesentlicher Korrespondenzen 1/2

Zeitfunktion x(t)	Konvergenz-bereich	Laplace-Transformierte X(s)
$\delta(t)$	$s \in C$	1
$1 \cdot \sigma(t)$	$\mathrm{Re}(s) > 0$	$\frac{1}{s}$
$\frac{1}{n!} \cdot t^n \cdot \sigma(t)$	$\mathrm{Re}(s) > 0$	$\frac{1}{s^{n+1}}$ für $n = 0, 1, \ldots$
$e^{\lambda \cdot t} \cdot \sigma(t)$	$\mathrm{Re}(s) > \mathrm{Re}(\lambda)$	$\frac{1}{s-\lambda}$
$\frac{1}{n!} \cdot t^n \cdot e^{\lambda \cdot t} \cdot \sigma(t)$	$\mathrm{Re}(s) > \mathrm{Re}(\lambda)$	$\frac{1}{(s-\lambda)^{n+1}}$ für $n = 0, 1, \ldots$

Laplace-Transformation

Eigenschaften – Zusammenfassung wesentlicher Korrespondenzen 2/2

Zeitfunktion x(t)	Konvergenz-bereich	Laplace-Transformierte X(s)
$\left(1-e^{-\frac{t}{T}}\right)\cdot\sigma(t)$	$\mathrm{Re}(s)>0$	$\frac{1}{s\cdot(1+T\cdot s)}$
$\sin(\omega_0\cdot t)\cdot\sigma(t)$	$\mathrm{Re}(s)>0$	$\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$
$\cos(\omega_0\cdot t)\cdot\sigma(t)$	$\mathrm{Re}(s)>0$	$\frac{s}{s^2+\omega_0^2}$
$\frac{1}{\omega_0}\cdot e^{\delta\cdot t}\cdot\sin(\omega_0\cdot t)\cdot\sigma(t)$	$\mathrm{Re}(s)>\delta$	$\frac{1}{(s-\delta)^2+\omega_0^2}=\frac{1}{s^2-2\cdot\delta\cdot s+\delta^2+\omega_0^2}$
$e^{\delta\cdot t}\cdot\cos(\omega_0\cdot t)\cdot\sigma(t)$	$\mathrm{Re}(s)>\delta$	$\frac{s-\delta}{(s-\delta)^2+\omega_0^2}=\frac{s-\delta}{s^2-2\cdot\delta\cdot s+\delta^2+\omega_0^2}$

Laplace-Transformation

Übungsaufgabe: Eigenschaften der Laplace-Transformation

- Funktion x(t) ist stückweise definiert

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \leq 0 \\ \frac{U_0}{2} \cdot \left(1 - \cos\left(\frac{\pi \cdot t}{T}\right)\right) & \text{für } 0 \leq t \leq T \\ U_0 & \text{für } T < t < 3 \cdot T \\ \frac{U_0}{2} \cdot \left(1 - \cos\left(\frac{\pi \cdot t}{T}\right)\right) & \text{für } 3 \cdot T \leq t \leq 4 \cdot T \\ 0 & \text{für } t > 4 \cdot T \end{cases}$$

- Zeichnen Sie die Zeitfunktion x(t) in einem geeigneten Maßstab
- Berechnen Sie die Laplace-Transformierte X(s) mit den Rechenregeln der Laplace-Transformation