Hochschule Karlsruhe
Technik und Wirtschaft
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES
Näher dran.

EIT Fakultät für Elektro- und Informationstechnik

Systemtheorie

Vorlesung 11: Inverse Laplace Transformation

Fakultät für Elektro- und Informationstechnik, Manfred Strohrmann

Laplace-Transformation

Inverse Laplace-Transformation – Umkehrformel

- Umkehrformel zur Laplace-Transformation

$$x(t) = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot j} \cdot \int_{c-j\cdot\infty}^{c+j\cdot\infty} X(s) \cdot e^{s\cdot t}\ ds = \mathcal{L}^{-1}\left\{X(s)\right\}$$

- Einsatz der Umkehrformel ist aufwändig und wird deshalb mit Hilfe der Partialbruchzerlegung und den Einsatz bekannter Korrespondenzen umgangen
- Umkehrformel kann jedoch zur Herleitung von Rechenregeln zur Laplace-Transformation nützlich sein, Beispiel Faltung im Laplace-Bereich
- Laplace-Transformierte für das Produkt zweier Zeitfunktionen ist definiert als

$$\mathcal{L}\left\{x(t) \cdot w(t)\right\} = \int_{0_-}^{\infty} x(t) \cdot w(t) \cdot e^{-s\cdot t}\ dt$$

Laplace-Transformation

Inverse Laplace-Transformation – Umkehrformel

- Zeitfunktion x(t) kann über die inverse Laplace-Transformierte ausgedrückt werden

$$\mathcal{L}\left\{x(t)\cdot w(t)\right\} = \int_{0_-}^{\infty} x(t)\cdot w(t)\cdot e^{-s\cdot t}\, dt = \int_{0_-}^{\infty} \frac{1}{2\cdot\pi\cdot j}\cdot\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(\upsilon)\cdot e^{\upsilon\cdot t}\, d\upsilon\cdot w(t)\cdot e^{-s\cdot t}\, dt$$

- Ausklammern des Vorfaktors und Tauschen der Integrationsreihenfolge

$$\mathcal{L}\left\{x(t)\cdot w(t)\right\} = \int_{0_-}^{\infty} \frac{1}{2\cdot\pi\cdot j}\cdot\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(\upsilon)\cdot e^{\upsilon\cdot t}\, d\upsilon\cdot w(t)\cdot e^{-s\cdot t}\, dt = \frac{1}{2\cdot\pi\cdot j}\cdot\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(\upsilon)\cdot\int_{0_-}^{\infty} w(t)\cdot e^{-(s-\upsilon)\cdot t}\, dt\, d\upsilon$$

$$= \frac{1}{2\cdot\pi\cdot j}\cdot\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(\upsilon)\cdot W(s-\upsilon)\, d\upsilon = X(s)*W(s)$$

- Laplace-Transformierte des Produktes zweier Originalfunktionen entspricht der komplexen Faltung der beiden Bildfunktionen

Laplace-Transformation

Rücktransformation – Vorteile der Rücktransformation über Partialbruchzerlegung

- Beispiele und Rechenregeln führten zu gebrochen rationalen Funktionen

$$X(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{\sum_{m=0}^{M} b_m \cdot s^m}{\sum_{n=0}^{N} a_n \cdot s^n} = \frac{b_M}{a_N} \cdot \frac{\prod_{m=1}^{M} (s - \beta_m)}{\prod_{n=1}^{N} (s - \alpha_n)}$$

- Laplace-Transformation beschränkt sich auf kausale Signale, es wird sich zeigen, dass damit der Zählergrad maximal so groß ist wie der Nennergrad $M \leq N$
- Koeffizienten a_n und b_m sind reelle Koeffizienten, Polstellen β_m und Nullstellen α_n sind entweder reell oder konjugiert komplex
- Funktion X(s) lässt sich in seltenen Fällen direkt über eine bekannte Korrespondenz zurücktransformieren
- Ansonsten Zerlegung der Funktion mit der Partialbruchzerlegung, Partialbrüche können auf bekannte Korrespondenzen zurückgeführt werden
- Inverse Laplace-Transformation mit komplexem Wegintegral muss nicht ausgeführt werden

Laplace-Transformation

Rücktransformation – Vorbereitung falls Zählergrad M gleich Nennergrad N

- Ist Zählergrad M genauso groß wie der Nennergrad N muss vor der Partialbruchzerlegung eine Polynomdivision durchgeführt werden, es entsteht ein konstanter Summand

$$X_0 = \frac{b_M}{a_N}$$

- Inverse Laplace-Transformierte einer Konstanten ist die Impulsfunktion $\delta(t)$, Summand entspricht einem Impuls zum Zeitpunkt t = 0
- Beispiel: Laplace-Transformierte X(s) soll in den Zeitbereich zurück transformiert werden, da der Zählergrad genauso groß ist wie der Nennergrad, wird eine Polynomdivision durchgeführt

$$X(s) = \frac{2 \cdot s - 3}{s - 3} = 2 + \frac{3}{s - 3}$$

Funktion im Zeitbereich kann mit Korrespondenztafel und Verschiebungsregel bestimmt werden zu

$$x(t) = 2 \cdot \delta(t) + 3 \cdot e^{3 \cdot t} \cdot \sigma(t)$$

Laplace-Transformation

Rücktransformation – Partialbruchzerlegung für einfache Pole α

- Besitzt die Laplace-Transformierte X(s) nur einfache Pole α, kann Sie mit Hilfe der Partialbruchzerlegung dargestellt werden als

$$X(s) = \frac{1}{a_N} \cdot \frac{\sum\limits_{M=0}^{M} b_m \cdot s^m}{\prod\limits_{n=1}^{N} (s - \alpha_n)} = \sum_{n=1}^{N} \frac{A_n}{s - \alpha_n}$$

- Koeffizienten A_n der einzelnen Partialbrüche können wie bei der Laplace-Transformation auf unterschiedliche Arten berechnet werden
  - Ausmultiplizieren
    Die Gleichung wird mit den Linearfaktoren des Nenners multipliziert, anschließend werden die Polstellen eingesetzt, und es ergibt sich ein Gleichungssystem für die Koeffizient A_n
  - Grenzwertbetrachtung
    Die einzelnen Koeffizienten werden über eine Bestimmungsformel berechnet, die grundsätzlich auf dem gleichen Verfahren basiert

$$A_n = \left(X(s) \cdot (s - \alpha_n) \right) \Big|_{s=\alpha_n}$$

Laplace-Transformation

Rücktransformation – Partialbruchzerlegung für einfache Pole α

- Jeder einzelne Partialbruch hat die Form

$$X_n(s) = \frac{A_n}{s - \alpha_n}$$

- Im Zeitbereich ergibt sich damit für jeden Partialbruch eine Exponentialfunktion

$$x_n(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{A_n}{s - \alpha_n}\right\} = A_n \cdot e^{\alpha_n \cdot t} \cdot \sigma(t)$$

- Summe der einzelnen Partialbrüche entspricht deshalb im Zeitbereich der Folge

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\sum_{n=1}^{N} \frac{A_n}{s - \alpha_n}\right\} = \sum_{n=1}^{N} A_n \cdot e^{\alpha_n \cdot t} \cdot \sigma(t)$$

Laplace-Transformation

Beispiel: Rücktransformation – Partialbruchzerlegung für einfache Pole α

- Laplace-Transformierte X(s) soll in den Zeitbereich zurücktransformiert werden, Zählergrad ist kleiner als der Nennergrad, und sie hat zwei einfache Pole

$$X(s) = \frac{s}{s^2 + 3 \cdot s + 2} = \frac{s}{(s+1) \cdot (s+2)} = \frac{A_1}{s+1} + \frac{A_2}{s+2}$$

- Ausmultiplizieren der Gleichung führt zu

$$s = A_1 \cdot (s+2) + A_2 \cdot (s+1)$$

- Einsetzen der Polstellen $s_{\infty 1}$ = - 1 und $s_{\infty 2}$ = - 2 führt zu A_1 = -1 und A_2 = 2

$$X(s) = \frac{-1}{s+1} + \frac{2}{s+2}$$

- Laplace-Transformierte werden mit bekannten Korrespondenzen in den Zeitbereich zurücktransformiert

$$x(t) = -1 \cdot e^{-1 \cdot t} \cdot \sigma(t) + 2 \cdot e^{-2 \cdot t} \cdot \sigma(t)$$

Laplace-Transformation

Rücktransformation – Partialbruchzerlegung für konjugiert komplexe Polpaare $\alpha = \delta \pm j \cdot \omega$

- Bei komplexen Polen gelten dieselben Regeln und Formeln wie bei den reellen Polen, Koeffizienten können mit denselben Verfahren bestimmt werden
- Alternativ kann Rücktransformation durch modifizierten Ansatz zur Partialbruchzerlegung vereinfacht werden
- Polpaare sind bei Laplace-Transformierten mit reellen Koeffizienten immer konjugiert komplex

$$\alpha_n = \delta_n \pm j \cdot \omega_n$$

- Außerdem sind in diesem Fall die Koeffizienten A_n konjugiert komplex

$$A_n = a_n \pm j \cdot b_n$$

- Damit kann der Ansatz zur Partialbruchzerlegung dargestellt werden als

$$X_n(s) = \frac{a_n + j \cdot b_n}{s - \delta_n - j \cdot \omega_n} + \frac{a_n - j \cdot b_n}{s - \delta_n + j \cdot \omega_n} = \frac{2 \cdot a_n \cdot s - 2 \cdot a_n \cdot \delta_n - 2 \cdot b_n \cdot \omega_n}{(s - \delta_n)^2 + \omega_n^2} = \frac{A_n \cdot s + B_n}{(s - \delta_n)^2 + \omega_n^2}$$

Laplace-Transformation

Rücktransformation – Partialbruchzerlegung für konjugiert komplexe Polpaare $\alpha = \delta \pm j\cdot\omega$

- Vereinfachter Ansatz bei konjugiert komplexen Polpaaren

$$X_n(s) = \frac{A_n \cdot s + B_n}{(s-\delta_n)^2 + \omega_n^2}$$

- Bestimmung der Koeffizienten A_n und B_n durch Ausmultiplizieren und Koeffizientenvergleich
- Umformen der Koeffizienten A_n und B_n, dass die Korrespondenzen mit den Nummern 19 und 20 zur Rücktransformation verwendet werden können

$$X_n(s) = \frac{A_n \cdot s + B_n}{(s-\delta)^2 + \omega^2} = A_n \cdot \frac{s-\delta}{(s-\delta)^2 + \omega^2} + (B_n + A_n \cdot \delta) \cdot \frac{1}{(s-\delta)^2 + \omega^2}$$

- Funktion im Zeitbereich

$$x_n(t) = A_n \cdot e^{\delta \cdot t} \cdot \cos(\omega \cdot t) \cdot \sigma(t) + \frac{B_n + A_n \cdot \delta}{\omega} \cdot e^{\delta \cdot t} \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot \sigma(t)$$

Laplace-Transformation

Übungsaufgabe: Rücktransformation

- Gegeben ist die Laplace-Transformierte

$$X(s) = \frac{2}{s^3 + 5 \cdot s^2 + 9 \cdot s + 5}$$

- Bestimmen Se die Pole der Laplace-Transformierten
- Bestimmen Sie die Partialbruchzerlegung der Laplace-Transformierten
- Bestimmen Sie die Zeitfunktion x(t), die zu der Laplace-Transformierten X(s) gehört

Laplace-Transformation

Rücktransformation – Partialbruchzerlegung für mehrfache Pole bei α

- Liegt ein P-facher Pol an der Stelle α vor, muss der Teil der Laplace-Transformierten dargestellt werden als

$$X(s) = \frac{B(s)}{(s-\alpha)^p} = \sum_{n=1}^{P} \frac{A_n}{(s-\alpha)^n}$$

- Koeffizienten A_n der einzelnen Partialbrüche können wieder auf unterschiedliche Arten berechnet werden
  - Ausmultiplizieren
    Gleichung wird mit den Polstellen multipliziert, anschließend wird die Polstelle und P - 1 weitere Werte für s eingesetzt, und es ergibt sich ein Gleichungssystem für die Koeffizienten A_n
  - Residuensatz
    Einzelne Koeffizienten werden über den Residuensatz berechnet

$$A_n = \frac{1}{(P-n)!} \cdot \frac{d^{P-n}}{ds^{P-n}} \left(X(s) \cdot (s-\alpha)^P \right) \Big|_{s=\alpha}$$

Laplace-Transformation

Rücktransformation – Partialbruchzerlegung für mehrfache Pole bei α

- Rücktransformation der einzelnen Partialbrüche ergibt sich aus bekannter Korrespondenz zu

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-\alpha)^n}\right\} = \frac{1}{(n-1)!}\cdot t^{n-1}\cdot e^{\alpha\cdot t}\cdot\sigma(t)$$

- Gesamtergebnis der Rücktransformation mit P-fachen Polstellen

$$x(t) = \sum_{n=1}^{P}\frac{A_n}{(n-1)!}\cdot t^{n-1}\cdot e^{\alpha\cdot t}\cdot\sigma(t)$$

- Polstelle α kann auch komplex sein

Beispiel: Rücktransformation – Partialbruchzerlegung für mehrfache Pole bei α

- Rücktransformation der Laplace-Transformierte X(s) in den Zeitbereich, sie hat einen doppelten Pol an der Stelle α = 0.5, Ansatz für die Partialbruchzerlegung

$$X(s) = \frac{s}{(s-0.5)^2} = \frac{A_1}{s-0.5} + \frac{A_2}{(s-0.5)^2}$$

- Ausmultiplizieren führt zu der Gleichung

$$s = A_1 \cdot (s-0.5) + A_2$$

- Einsetzen der Zahlenwerte s = 0.5 und s = 0 ergibt A_1 = 0.5 und A_2 = 1, Darstellung der Funktion X(s) als Summe von Partialbrüchen

$$X(s) = \frac{s}{(s-0.5)^2} = \frac{1}{s-0.5} + \frac{0.5}{(s-0.5)^2}$$

- Rücktransformation mit bekannten Korrespondenzen

$$x(t) = e^{0.5 \cdot t} \cdot \sigma(t) + 0.5 \cdot t \cdot e^{0.5 \cdot t} \cdot \sigma(t)$$

Laplace-Transformation mit MATLAB

- Laplace-Transformation ist eine wichtige Voraussetzung für die Beschreibung zeitkontinuierlichen Systeme im Laplace-Bereich und den Entwurf von Filtern, computerunterstützte Berechnung und Interpretation der Laplace-Transformierten mit MATLAB
- Zur Berechnung der Laplace-Transformation und inversen Laplace-Transformation sind folgende Verfahren von Interesse
  - Darstellung von Funktionen
  - Laplace-Transformation und inverse Laplace-Transformation
  - Umformung und Vereinfachung von Ausdrücken
  - Partialbruchzerlegung
- Punkte werden für MATLAB beschrieben, weitere Information finden sich in der MATLAB-Hilfe zur Symbolic Math Toolbox.

Laplace-Transformation

Laplace-Transformation mit MATLAB – Darstellung von Funktionen

Befehl	Beschreibung
syms s t x X	Definition von Variablen für die symbolische Berechnung, hier werden die Variable s und t, die Funktion x und ihre Laplace-Transformierte X definiert
heaviside(t)	Sprungfunktion
dirac(t)	Impulsfunktion
+ - * /	Arithmetische Operationen können wie gewohnt verwendet werden
exp(a*t)	Exponentialfunktion kann wie gewohnt verwendet werden
sin(a*t), cos(a*t)	Auswahl von wesentlichen Funktionen, weitere Funktionen sind in der MATLAB-Hilfe beschrieben

Laplace-Transformation

Beispiel: Laplace-Transformation mit MATLAB – Darstellung von Funktionen

- Gegeben ist die Funktion x(t)

$$x(t) = 2 \cdot \sigma(t) + 5 \cdot e^{3 \cdot t} \cdot \sigma(t) + \delta(t - 3)$$

- In MATLAB ergibt sich die Definition der Funktion aus folgender Befehlssequenz

```
% Definition der symbolischen Variablen
syms x X t s;

% Definition der Funktion
x = 2*heaviside(t) + 5*exp(3*t)*heaviside(t) + dirac(t-3);
```

- Definition der symbolischen Variablen x, X, t und s

Laplace-Transformation

Beispiel: Laplace-Transformation mit MATLAB – Laplace-Transformation

- Sind die Funktionen dargestellt, können sie in den Laplace-Bereich transformiert werden
- Laplace-Transformation und inverse Laplace-Transformation mit zwei MATLAB-Befehlen

Befehl	Beschreibung
X = laplace(x,t,s)	Laplace-Transformation der symbolisch definierten Funktion x(t) in den Laplace-Bereich mit der Variablen s
x = ilaplace(X,s,t)	inverse Laplace-Transformation der symbolisch definierten Laplace-Transformierten X mit der Variablen s in den Zeitbereich t

Laplace-Transformation

Beispiel: Laplace-Transformation mit MATLAB – Laplace-Transformation

- Funktion x(t) soll in den Laplace-Bereich transformiert werden

$$x(t) = 2 \cdot \sigma(t) + 5 \cdot e^{3 \cdot t} \cdot \sigma(t) + \delta(t-3)$$

- Erwartetes Ergebnis

$$X(s) = 2 \cdot \frac{1}{s} + 5 \cdot \frac{1}{s-3} + e^{-3 \cdot s}$$

- Berechnung in MATLAB mit folgender Befehlssequenz

```
% Transformation der Folge in den Laplace-Bereich
X =laplace(x,t,s)
```

- MATLAB-Ergebnis

```
X =
1/exp(3*s) + 5/(s - 3) + 2/s
```

Laplace-Transformation

Beispiel: Laplace-Transformation mit MATLAB – Laplace-Transformation

- Rücktransformation mit demselben Beispiel

```
% Transformation der Folge in den z-Bereich
y =ilaplace(X,s,t)
```

- MATLAB-Ergebnis

```
y =
dirac(t - 3) + 5*exp(3*t) + 2
```

- Dabei wird von MATLAB die heaviside-Funktion weggelassen, da alle Ergebnisse nur für $t \geq 0$ gelten
- Ergebnis stimmt mit der ursprünglichen Funktion überein

$$x(t) = 2 \cdot \sigma(t) + 5 \cdot e^{3 \cdot t} \cdot \sigma(t) + \delta(t-3)$$

Laplace-Transformation

Laplace-Transformation mit MATLAB – Vereinfachung von Ausdrücken

Befehl	Beschreibung
collect(x,t)	Sortiert den Ausdruck x nach Potenzen der Variable t
expand(x)	Multipliziert den Ausdruck x aus
factor(x)	Stellt einen Ausdruck x als Produkt von Faktoren dar
simple(x)	Erstellt die kürzeste Darstellungsform für den Ausdruck x
pretty(x)	Stellt den Ausdruck x in einer grafische Form dar
[r,p,k] = residue(b,a)	Berechnung der Partialbrüche mit Koeffizient r_i, Pol p_i und Konstante k bei gegebener gebrochen rationaler Funktion mit den Koeffizienten b_i und a_i
[a,b] = residue(r,p,k)	Berechnung der Koeffizienten b_i und a_i einer gebrochen rationalen Funktion bei gegebenen Partialbrüchen mit Koeffizient r_i, Pol p_i und Konstante k

Beispiel: Laplace-Transformation mit MATLAB – Laplace-Transformation

- Laplace-Transformierte einer Kosinus-Funktion errechnet sich mit MATLAB mit folgender Sequenz

```
% Definition der symbolischen Variablen
syms f t s x X;

% Definition der Kosinus-Funktion
x = cos(2*pi*f*t);

X = laplace(x,t,s);
pretty(simple(X))
        s
  -------------
      2  2     2
  4 pi  f  + s
```

- Ergebnis entspricht der erwarteten Korrespondenz

Laplace-Transformation

Laplace-Transformation mit MATLAB – Partialbruchzerlegung

- Befehl residue rechnet die unterschiedlichen Darstellungsformen für gebrochen rationale Funktionen ineinander um, Berechnung wird numerisch durchgeführt, der Befehl ist deshalb kein Teil der Symbolic Math Toolbox

- Nomenklatur bei einfachen Polen:

$$\frac{b_1 \cdot s^M + b_2 \cdot s^{M-1} + b_3 \cdot s^{M-2} + \ldots + b_M \cdot s + b_{M+1}}{a_1 \cdot s^N + a_2 \cdot s^{N-1} + a_3 \cdot s^{N-2} + \ldots + a_N \cdot s + a_{N+1}} = \frac{r_1}{s-p_1} + \frac{r_2}{s-p_2} + \ldots + \frac{r_N}{s-p_N} + k$$

- Treten bei der Partialbruchzerlegung vielfache Pole p_n auf, so werden sie mit aufsteigender Potenz dargestellt

$$\frac{b_1 \cdot s^M + b_2 \cdot s^{M-1} + b_3 \cdot s^{M-2} + \ldots + b_M \cdot s + b_{M+1}}{a_1 \cdot s^N + a_2 \cdot s^{N-1} + a_3 \cdot s^{N-2} + \ldots + a_N \cdot s + a_{N+1}} = \ldots + \frac{r_n}{s-p_n} + \frac{r_{n+1}}{\left(s-p_n\right)^2} + \frac{r_{n+2}}{\left(s-p_n\right)^3} + \ldots$$

Laplace-Transformation

Beispiel: Laplace-Transformation mit MATLAB – Partialbruchzerlegung

- Partialbruchzerlegung für folgendes Beispiel

$$X(s)=\frac{s}{s^2+3\cdot s+2}=\frac{s}{(s+1)\cdot(s+2)}=\frac{-1}{s+1}+\frac{2}{s+2}$$

- Partialbruchzerlegung ergibt sich mit MATLAB mit folgender Sequenz:

```
% Definition der gebrochen rationalen Funktion über Koeffizienten-Vektoren
b = [1 0];
a = [1 3 2];

% Berechnung der Partialbrüche
[r,p,k] = residue(b,a)
r = [2 -1]
p = [-2 -1]
k = []
```

- Ergebnis von MATLAB entspricht der analytischen Rechnung