Hochschule Karlsruhe
Technik und Wirtschaft
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Näher dran.

EIT Fakultät für Elektro- und Informationstechnik

Systemtheorie

Vorlesung 12: Lösung linearer Differentialgleichungen

Fakultät für Elektro- und Informationstechnik, Manfred Strohrmann

Systeme im Laplace-Bereich

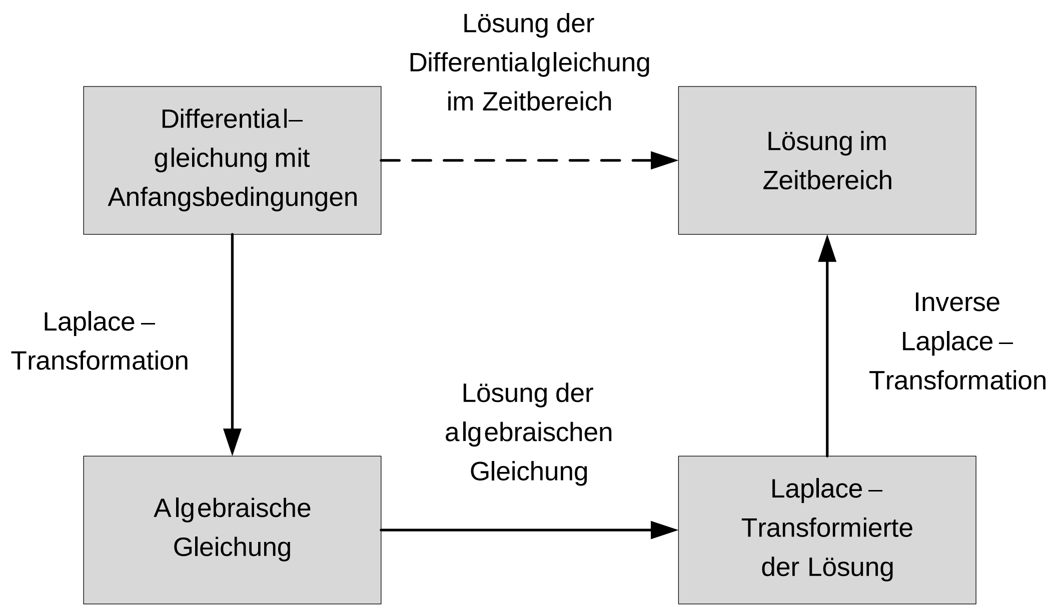
Einführung

- Laplace-Transformation kann zur analytischen Lösung von Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten eingesetzt werden, analytische Lösung von Differentialgleichungen ist mit Hilfe der Laplace-Transformation einfacher und übersichtlicher als mit Vier-Schritt-Methode
- Lösung von linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten führt zu dem Begriff der Übertragungsfunktion, mit ihr lassen sich Systemeigenschaften bereits im Laplace-Bereich feststellen
  - Stabilitätsaussagen
  - Aussagen zur Schwingungsneigung
  - Kausalität und Sprungfähigkeit
- Unterstützung durch MATLAB-Befehle und MATLAB-Methoden
- Ein- und Umschaltverhaltens von RLC-Schaltungen als eine Anwendung der Laplace-Transformation
- Lange Nacht der Systemtheorie: Simulation des Einschwingverhaltens eines Lautsprechers

Systeme im Laplace-Bereich

Lösung linearer Differentialgleichungen – Grundidee

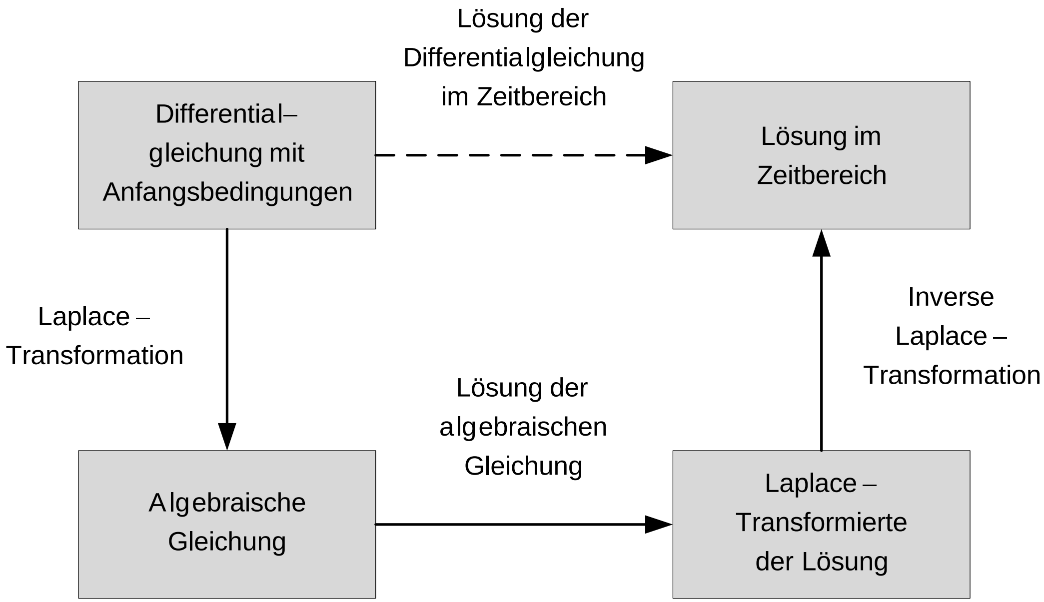
- Voraussetzung für die Beschreibung von LTI-Systemen ist die Lösung von linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten und Anfangsbedingungen mit Hilfe der Laplace-Transformation
- Differentialgleichung wird in den Laplace-Bereich transformiert
- Lösung der Differentialgleichung im Laplace-Bereich wird dadurch vereinfacht, dass die Ableitung im Zeitbereich im Laplace-Bereich in eine Multiplikation mit der Variable s übergeht
- Differentialgleichung geht in algebraische Gleichung über, die vergleichsweise einfach gelöst werden kann



Systeme im Laplace-Bereich

Lösung linearer Differentialgleichungen – Grundidee

- Lösung Y(s) im Laplace-Bereich ist in den diskutierten Fällen eine gebrochen rationale Funktion
- Y(s) muss in Partialbrüche aufgeteilt werden, die einfache bzw. mehrfache reelle Pole oder konjugiert komplexe Polpaare aufweisen
- Vorgehen wird anhand von Differentialgleichungen erster und zweiter Ordnung verdeutlicht



Systeme im Laplace-Bereich

Lösung linearer Differentialgleichungen – Differentialgleichung erster Ordnung

- Lineare Differentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{dy}{dt} + a_0 \cdot y(t) = b_0 \cdot x(t)$$

Koeffizient der höchsten Ableitung a_1 = 1 gesetzt, normierte Darstellung

- Transformation in den Laplace-Bereich, Berücksichtigung der Anfangsbedingung

$$s \cdot Y(s) - y(0) + a_0 \cdot Y(s) = b_0 \cdot U(s)$$

- Durch die Laplace-Transformation geht die lineare Differentialgleichung in eine lineare algebraische Gleichung über, die erheblich einfacher zu lösen ist als die lineare Differentialgleichung

$$Y(s) = \frac{b_0}{s + a_0} \cdot U(s) + \frac{1}{s + a_0} \cdot y(0)$$

- Berechnung der Funktion y(t) muss Y(s) zurück in den Zeitbereich transformiert werden, bei bekannten Funktionen u(t) ist das durch Einsetzen der Laplace-Transformierten U(s) und unter Verwendung der Regeln für die Rücktransformation möglich

Systeme im Laplace-Bereich

Lösung linearer Differentialgleichungen – Differentialgleichung erster Ordnung

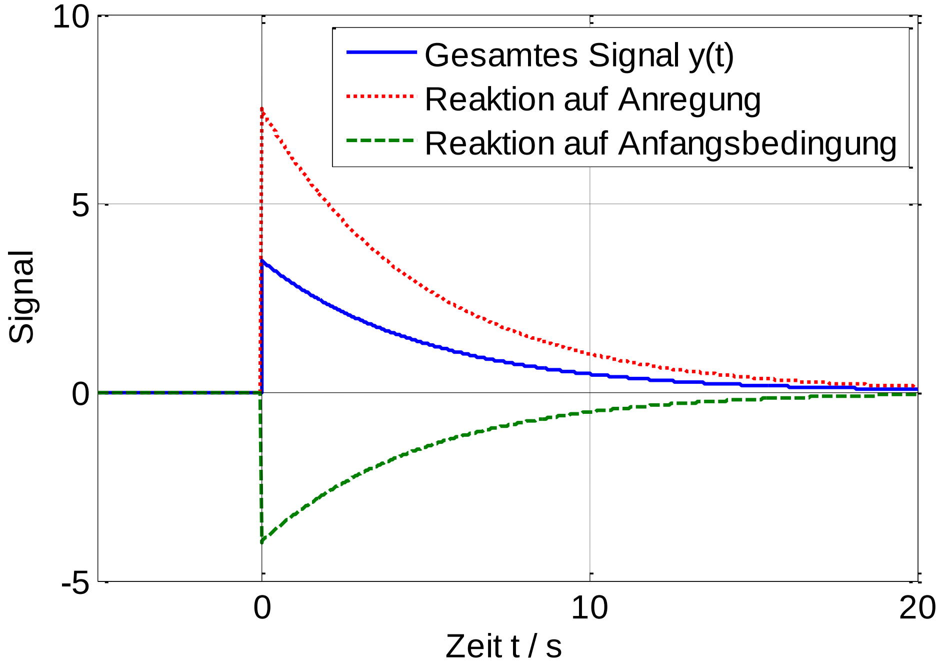
- Lösung teilt sich in zwei Anteile
- Erster Summand beschreibt die Reaktion des Systems auf das Eingangssignal
- Zweiter Summand beschreibt die Systemreaktion auf die Anfangsbedingung y(0)
- Für Impulsfunktion u(t) = δ(t) mit der Laplace-Transformierten U(s) = 1 ergibt sich

$$Y(s) = \frac{b_0}{s+a_0}\cdot 1 + \frac{1}{s+a_0}\cdot y(0)$$

bzw. im Zeitbereich

$$y(t) = b_0 \cdot e^{-a_0\cdot t}\cdot \sigma(t) + y(0)\cdot e^{-a_0\cdot t}\cdot \sigma(t)$$

- Beispiel für die Parameter a_0 = 0.2, b_0 = 7.5 und y(0) = - 4.



Systeme im Laplace-Bereich

Lösung linearer Differentialgleichungen – Differentialgleichung zweiter Ordnung

- Lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\frac{d^2y}{dt^2} + a_1 \cdot \frac{dy}{dt} + a_0 \cdot y(t) = b_1 \cdot \frac{du}{dt} + b_0 \cdot u(t)$$

  Koeffizient der höchsten Ableitung $a_2 = 1$ gesetzt, normierte Darstellung

- Transformation in den Laplace-Bereich, Berücksichtigung der Anfangsbedingung

$$s^2 \cdot Y(s) - s \cdot y(0) - y'(0) + a_1 \cdot \big(s \cdot Y(s) - y(0)\big) + a_0 \cdot Y(s) = b_1 \cdot \big(s \cdot U(s) - u(0)\big) + b_0 \cdot U(s)$$

- Systemanregung erfolgt mit einem kausalen Eingangssignal, Anfangsbedingung u(0) = 0
- Auflösen nach dem Ausgangssignal im Laplace-Bereich Y(s)

$$Y(s) = \frac{b_1 \cdot s + b_0}{s^2 + a_1 \cdot s + a_0} \cdot U(s) + \frac{s \cdot y(0) + y'(0) + a_1 \cdot y(0)}{s^2 + a_1 \cdot s + a_0}$$

- Lösung setzt sich aus zwei Teilen zusammen, erster Summand beschreibt die Systemreaktion auf das Eingangssignal u(t), zweiter Summand beschreibt das Systemverhalten auf die Anfangsbedingungen

Systeme im Laplace-Bereich

Lösung linearer Differentialgleichungen – Differentialgleichung zweiter Ordnung

- Berechnung der Funktion y(t) für den Fall, dass das Eingangssignal die Impulsfunktion u(t) = δ(t) ist und dass die Anfangsbedingungen y(0) = 0 und y'(0) = 0 verschwinden

$$Y(s) = \frac{b_1 \cdot s + b_0}{s^2 + a_1 \cdot s + a_0} = \frac{b_1 \cdot s + b_0}{(s - \alpha_1) \cdot (s - \alpha_2)}$$

- Ansatz für die Rücktransformation in den Zeitbereich ist von der Lage der Pole $\alpha_{1,2}$ abhängig, Pole der Laplace-Transformierten Y(s) errechnen sich aus den Nullstellen des Nenners

$$s^2 + a_1 \cdot s + a_0 = (s - \alpha_1) \cdot (s - \alpha_2) = 0$$

durch Auflösen der quadratischen Gleichung zu

$$\alpha_{1,2} = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{a_1^{\ 2}}{4} - a_0}$$

- Pole $a_{1,2}$ können einfach reell, konjugiert komplex oder identisch sein

Systeme im Laplace-Bereich

Lösung linearer Differentialgleichungen – Differentialgleichung zweiter Ordnung

- Zwei einfache, reelle Pole für den Fall

$$\frac{a_1^{\,2}}{4} - a_0 > 0$$

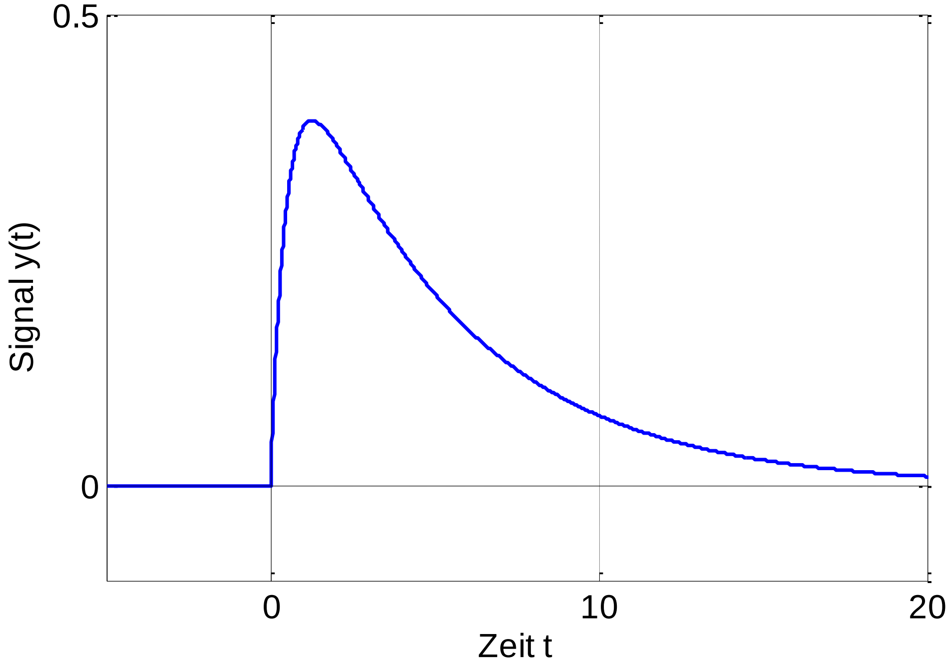
- Zerlegung der gebrochen rationale Funktion in zwei Partialbrüche erster Ordnung

$$Y(s) = \frac{b_1 \cdot s + b_0}{(s-\alpha_1)\cdot(s-\alpha_2)} = \frac{A_1}{s-\alpha_1} + \frac{A_2}{s-\alpha_2}$$

$$= \frac{b_0 + b_1 \cdot \alpha_1}{\alpha_1 - \alpha_2} \cdot \frac{1}{s-\alpha_1} + \frac{b_0 + b_1 \cdot \alpha_2}{\alpha_2 - \alpha_1} \cdot \frac{1}{s-\alpha_2}$$

- Rücktransformation in den Zeitbereich führt zu dem Ausgangssignal y(t)

$$y(t) = \frac{b_0 + b_1 \cdot \alpha_1}{\alpha_1 - \alpha_2} \cdot e^{\alpha_1 \cdot t} \cdot \sigma(t) + \frac{b_0 + b_1 \cdot \alpha_2}{\alpha_2 - \alpha_1} \cdot e^{\alpha_2 \cdot t} \cdot \sigma(t)$$



$a_0 = 0.4$, $a_1 = 2.2$, $b_0 = 1$ und $b_1 = 0$

Systeme im Laplace-Bereich

Lösung linearer Differentialgleichungen – Differentialgleichung zweiter Ordnung

- Für den Fall

  $$\frac{a_1^2}{4} - a_0 < 0$$

  ergibt sich ein konjugiert komplexes Polpaar

  $$\alpha_{1,2} = -\frac{a_1}{2} \pm j \cdot \sqrt{a_0 - \frac{a_1^2}{4}} = \delta \pm j \cdot \omega$$

- Einsetzen der Pole in die Lösung y(t)

$$y(t) = \frac{b_0 + b_1 \cdot (\delta + j \cdot \omega)}{(\delta + j \cdot \omega) - (\delta - j \cdot \omega)} \cdot e^{(\delta + j \cdot \omega) \cdot t} \cdot \sigma(t) + \frac{b_0 + b_1 \cdot (\delta - j \cdot \omega)}{(\delta - j \cdot \omega) - (\delta + j \cdot \omega)} \cdot e^{(\delta - j \cdot \omega) \cdot t} \cdot \sigma(t)$$

$$= \left(\frac{b_0 + b_1 \cdot (\delta + j \cdot \omega)}{2 \cdot j \cdot \omega} \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t} + \frac{b_0 + b_1 \cdot (\delta - j \cdot \omega)}{-2 \cdot j \cdot \omega} \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t} \right) \cdot e^{\delta \cdot t} \cdot \sigma(t)$$

Systeme im Laplace-Bereich

Lösung linearer Differentialgleichungen – Differentialgleichung zweiter Ordnung

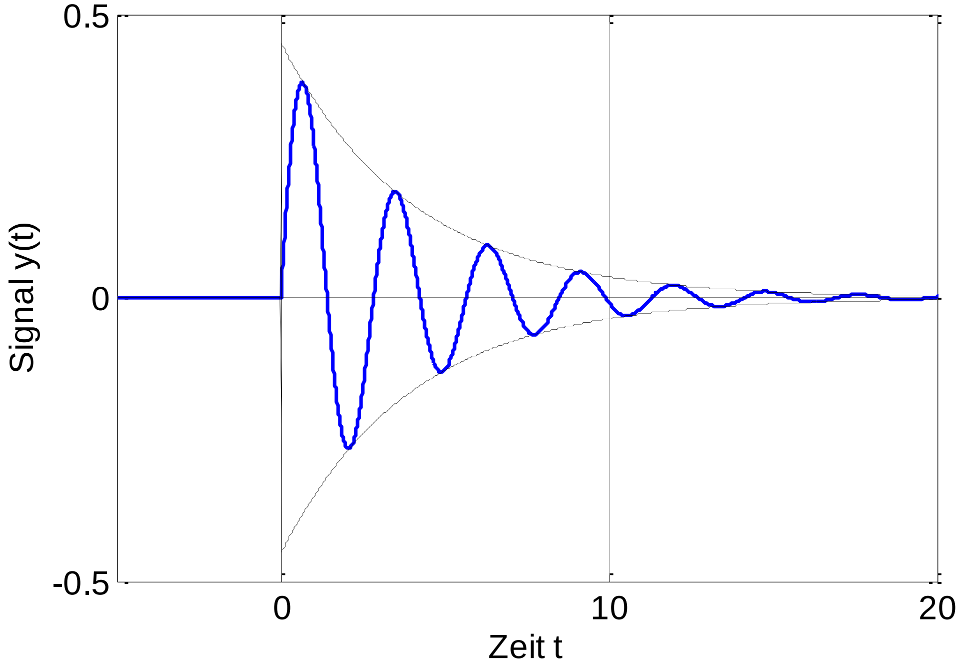
- Koeffizienten der beiden Exponentialfunktionen sind bei reellen Koeffizienten a_n und b_m konjugiert komplex, sie können über Betrag und Phase dargestellt werden

$$\frac{b_0 + b_1 \cdot (\delta \pm j \cdot \omega)}{2 \cdot j \cdot \omega} = r \cdot e^{\pm j \cdot \varphi}$$

- Ausgangssignal y(t) ergibt sich zu

$$y(t) = \left(r \cdot e^{j \cdot \varphi} \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t} + r \cdot e^{-j \cdot \varphi} \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t}\right) \cdot e^{\delta \cdot t} \cdot \sigma(t)$$
$$= 2 \cdot r \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi) \cdot e^{\delta \cdot t} \cdot \sigma(t)$$

- Verhalten der Impulsantwort y(t) für $a_0 = 5$, $a_1 = 0.5$, $b_0 = 1$ und $b_1 = 0$
- Systemantwort ist eine harmonische Schwingung, deren Amplitude exponentiell abklingt



Systeme im Laplace-Bereich

Lösung linearer Differentialgleichungen – Differentialgleichung zweiter Ordnung

- Doppelter, reller Pol α für den Fall

$$\frac{a_1^2}{4} - a_0 = 0$$

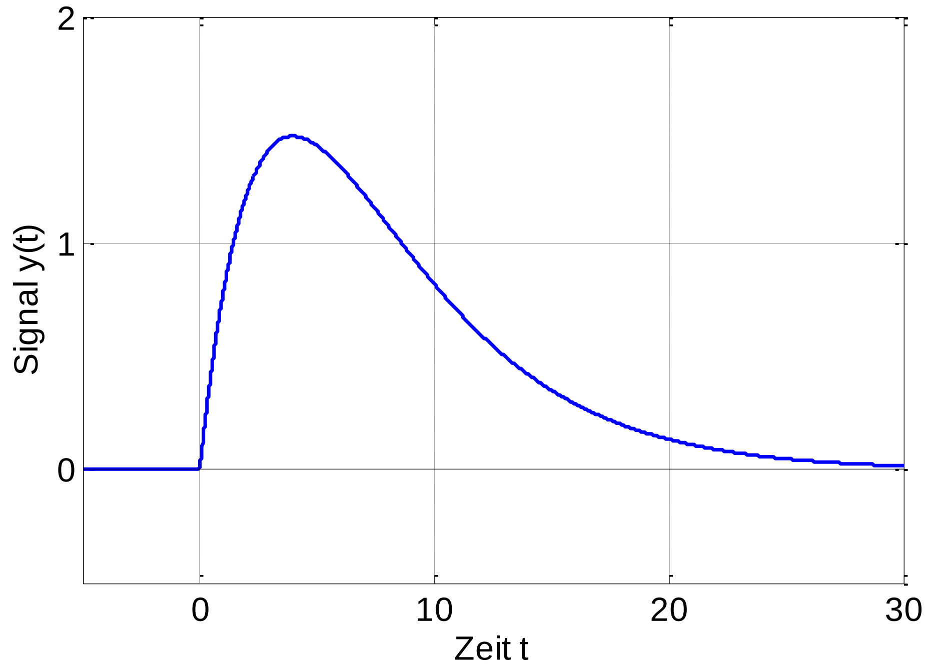
- Zerlegung der gebrochen rationale Funktion in zwei Partialbrüche erster Ordnung

$$Y(s) = \frac{b_1 \cdot s + b_0}{s^2 + a_1 \cdot s + a_0} = \frac{b_1 \cdot s + b_0}{(s-\alpha)^2} = \frac{A_1}{s-\alpha} + \frac{A_2}{(s-\alpha)^2}$$

$$= \frac{b_1}{s-\alpha} + \frac{b_0 + b_1 \cdot \alpha}{(s-\alpha)^2}$$

- Rücktransformation in den Zeitbereich führt zu dem Ausgangssignal y(t)

$$y(t) = b_1 \cdot e^{\alpha \cdot t} \cdot \sigma(t) + (b_0 + b_1 \cdot \alpha) \cdot t \cdot e^{\alpha \cdot t} \cdot \sigma(t)$$



a_0 = 0.0625, a_1 = 0.5, b_0 = 1 und b_1 = 0

Systeme im Laplace-Bereich

Lösung linearer Differentialgleichungen – Zusammenfassung

- Lösung von lineare Differentialgleichungen erster und zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten vorgestellt
- Methode kann auch bei Differential-gleichungen höherer Ordnung angewendet werden, Methode ist immer möglich, wenn die Partialbruchzerlegung gelingt
- Problematisch ist die Lösung, wenn die Pole der Laplace-Transformierten unbekannt sind und die Differentialgleichung eine Ordnung $N \geq 2$ aufweist, in diesem Fall erfolgt die Partialbruchzerlegung numerisch, z.B. mit Befehl residue von MATLAB

Schritt	Beschreibung
1	Transformation der Differentialgleichung unter Berücksichtigung der Anfangsbedingungen in den Laplace-Bereich
2	Berechnung der Laplace-Transformierten U(s) des Eingangssignals u(t)
3	Auflösen der Gleichung im Laplace-Bereich nach der gesuchten Größe Y(s)
4	Rücktransformation über Partialbruchzerlegung und Korrespondenztafel

Systeme im Laplace-Bereich

Übungsaufgabe: Lösung linearer Differentialgleichungen

- Gegeben ist ein System, das durch die Differentialgleichung

  $$\frac{d^2y}{dt^2} + 2 \cdot \frac{dy}{dt} + 2 \cdot y(t) = u(t)$$

  und die Anfangsbedingungen

  $$y(0) = 0 \qquad y'(0) = 1$$

  beschrieben wird. Es wird mit einem Eingangssignal

  $$u(t) = \sigma(t-2)$$

  angeregt. Berechnen Sie die Laplace-Transformierte Y(s) sowie das zughörige Zeitsignal y(t)

Systeme im Laplace-Bereich

Übungsaufgabe: Lösung linearer Differentialgleichungen

- Gegeben ist ein System, das durch die Differentialgleichung

  $$\frac{d^3x}{dt^3}+\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dx}{dt}+x(t)=0$$

  und die Anfangsbedingungen

  $$\ddot{x}(0)=1 \quad \dot{x}(0)=0 \quad x(0)=1$$

  beschrieben wird
- Transformieren Sie die Differentialgleichung in den Laplace-Bereich
- Berechnen Sie die Pollagen der Laplace-Transformierten X(s) und stellen Sie die Pollagen in der komplexen Ebene dar. Handelt es sich bei dem Signal x(t) um ein schwingendes Signal, erreicht das Signal einen stationären Endwert?
- Berechnen Sie das Signal x(t) für den Zeitraum t > 0 durch Rücktransformation