Hochschule Karlsruhe
Technik und Wirtschaft
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES
Näher dran.

EIT Fakultät für Elektro- und Informationstechnik

Systemtheorie

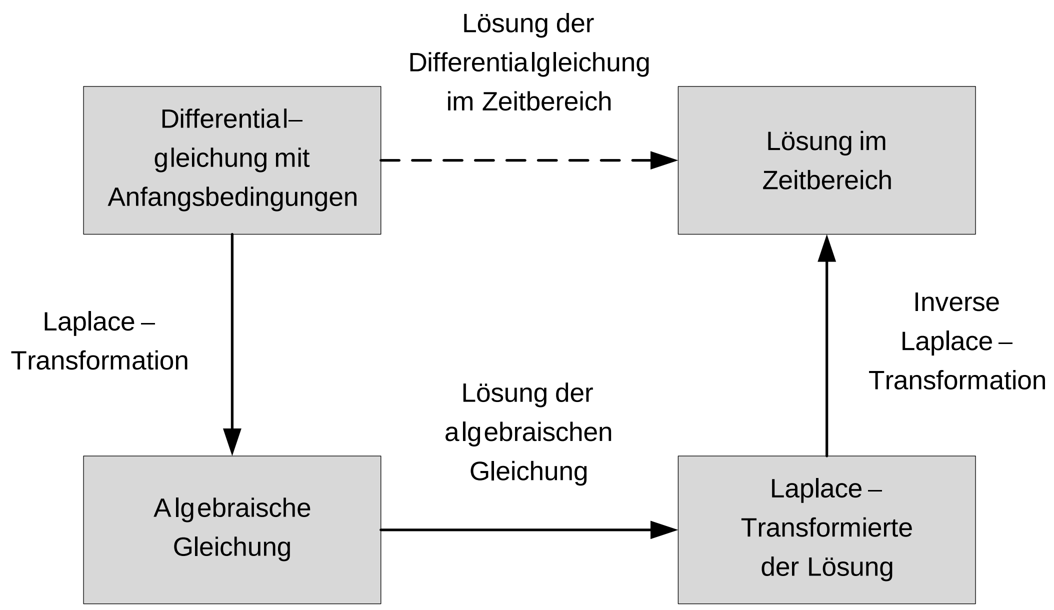
Vorlesung 13: Übungen zu linearen Differentialgleichungen

Fakultät für Elektro- und Informationstechnik, Manfred Strohrmann

Systeme im Laplace-Bereich

Lösung linearer Differentialgleichungen – Grundidee

- Voraussetzung für die Beschreibung von LTI-Systemen ist die Lösung von linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten und Anfangsbedingungen mit Hilfe der Laplace-Transformation
- Differentialgleichung wird in den Laplace-Bereich transformiert
- Lösung der Differentialgleichung im Laplace-Bereich wird dadurch vereinfacht, dass die Ableitung im Zeitbereich im Laplace-Bereich in eine Multiplikation mit der Variable s übergeht
- Differentialgleichung geht in algebraische Gleichung über, die vergleichsweise einfach gelöst werden kann



Systeme im Laplace-Bereich

Lösung linearer Differentialgleichungen – Grundidee

- Lösung Y(s) im Laplace-Bereich ist in den diskutierten Fällen eine gebrochen rationale Funktion
- Y(s) muss in Partialbrüche aufgeteilt werden, die einfache bzw. mehrfache reelle Pole oder konjugiert komplexe Polpaare aufweisen
- Zusammenfassung des standardisierten Vorgehens in Tabelle
- Vorgehen wird an mehreren Beispielen geübt und die Bedeutung für die Beschreibung dynamischer Systeme am Beispiel des Feder-Masse-Systems herausgearbeitet

Schritt	Beschreibung
1	Transformation der Differentialgleichung unter Berücksichtigung der Anfangsbedingungen in den Laplace-Bereich
2	Berechnung der Laplace-Transformierten U(s) des Eingangssignals u(t)
3	Auflösen der Gleichung im Laplace-Bereich nach der gesuchten Größe Y(s)
4	Rücktransformation über Partialbruchzerlegung und Korrespondenztafel

Systeme im Laplace-Bereich

Übungsaufgabe: Lösung linearer Differentialgleichungen

- Gegeben ist ein System, das durch folgende Differentialgleichung

  $$\frac{d^2y}{dt^2} + 5 \cdot \frac{dy}{dt} + 4 \cdot y(t) = u(t)$$

  und die Anfangsbedingungen

  $$\dot{y}(0) = 2 \qquad y(0) = 1$$

  beschrieben wird.
- Berechnen Sie das Einschwingverhalten des Systems y(t) für den Fall, dass kein Eingangssignal u(t) = 0 angelegt wird.
- Welchem Wert strebt y(t) für $t \to \infty$ zu?
- Welches Ausgangssignal ergibt sich für das Eingangssignal u(t)?

  $$u(t) = \delta(t-2)$$

Systeme im Laplace-Bereich

Übungsaufgabe: Lösung linearer Differentialgleichungen

- Gegeben ist ein System, das durch folgende Differentialgleichung

  $$3 \cdot \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + y(t) = u(t)$$

  und die Anfangsbedingungen

  $$\dot{y}(0) = 1 \qquad y(0) = 0$$

  beschrieben wird.

- Berechnen Sie das Einschwingverhalten des Systems y(t) für den Fall, dass kein Eingangssignal u(t) = 0 angelegt wird.

- Welches Ausgangssignal ergibt sich für das Eingangssignal u(t)?

$$u(t) = \sigma(t) - \sigma(t-2)$$

Systeme im Laplace-Bereich

Übungsaufgabe: Lösung linearer Differentialgleichungen

- Ein Feder-Masse-System wird beschrieben durch die Differentialgleichung

$$F_E(t) = m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + D \cdot \frac{dx}{dt} + c \cdot x(t)$$

- Das System ist zum Zeitpunkt t = 0 in Ruhe und nicht ausgelenkt.
- An die Masse greift zum Zeitpunkt t = 0 eine Kraft von

$$F_E(t) = 0.2\ N \cdot \sigma(t)$$

- Berechnen Sie die Bewegung x(t) des Feder-Masse-Systems für die Parameter
  – m = 0.01 kg
  – D = 0.1 N·s/m
  – c = 10 N/m
- Welcher stationäre Wert x stellt sich für $t \to \infty$ ein?