Hochschule Karlsruhe
Technik und Wirtschaft
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES
Näher dran.

EIT Fakultät für Elektro- und Informationstechnik

Systemtheorie

Vorlesung 14: Übertragungsfunktion von LTI-Systemen

Fakultät für Elektro- und Informationstechnik, Manfred Strohrmann

Systeme im Laplace-Bereich

Einführung

- Wichtige Untergruppe von Systemen sind Systeme, die über lineare Differential-gleichungen mit konstanten Koeffizienten beschrieben werden
- Sie zeichnen sich durch folgende Eigenschaften aus:
  - Linearität
  - Zeitinvarianz
- Beschreibung der Systeme im Laplace-Bereich mit Hilfe einer Übertragungsfunktion
- Übertragungsfunktion bietet den Vorteil, dass Systemeigenschaften bereits im Laplace-Bereich erkannt werden können

$$u(t) \longrightarrow \boxed{\sum_{n=0}^{N} a_n \cdot \frac{d^n y}{dt^n} = \sum_{m=0}^{M} b_m \cdot \frac{d^m u}{dt^m}} \longrightarrow y(t)$$

Systeme im Laplace-Bereich

Übertragungsfunktion – Differentialgleichung und Übertragungsfunktion

- Ausgehend von der allgemeinen Differentialgleichung

  $$\sum_{n=0}^{N} a_n \cdot \frac{d^n y}{dt^n} = \sum_{m=0}^{M} b_m \cdot \frac{d^m u}{dt^m}$$

  wird die Beschreibung im Laplace-Bereich hergeleitet

- Um generelle Eigenschaften des Systems zu charakterisieren, werden wie bei der Berechnung der Impuls- und Sprungantwort alle Anfangsbedingungen zu null gesetzt

  $$\sum_{n=0}^{N} a_n \cdot s^n \cdot Y(s) = \sum_{m=0}^{M} b_m \cdot s^m \cdot U(s)$$

- Ausklammern der Funktion Y(s) und U(s), und Auflösen nach Y(s) führt zu

  $$Y(s) = \frac{\sum_{m=0}^{M} b_m \cdot s^m}{\sum_{n=0}^{N} a_n \cdot s^n} \cdot U(s) = G(s) \cdot U(s)$$

Systeme im Laplace-Bereich

Übertragungsfunktion – Differentialgleichung und Übertragungsfunktion

- Komplexe Übertragungsfunktion G(s) des Systems charakterisiert das lineare System
- Übertragungsfunktion stellt im Laplace-Bereich das Verhältnis von Wirkung zu Ursache dar

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) = \frac{\sum_{m=0}^{M} b_m \cdot s^m}{\sum_{n=0}^{N} a_n \cdot s^n}$$

- Weisen Zähler- und Nennerpolynom dieselben Nullstellen auf, werden die entsprechenden Linearfaktoren gekürzt, Übertragungsfunktion G(s) besitzt keine gemeinsamen Pole und Nullstellen

Systeme im Laplace-Bereich

Beispiel: Übertragungsfunktion – Differentialgleichung und Übertragungsfunktion

- Differentialgleichung eines Feder-Masse-Systems

$$F_E(t) = m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + D \cdot \frac{dx}{dt} + c \cdot x(t)$$

- Laplace-Transformation mit verschwindenden Anfangsbedingung

$$F_E(s) = \left(m \cdot s^2 + D \cdot s + c\right) \cdot X(s)$$

Übertragungsfunktion ergibt sich zu

$$G(s) = \frac{X(s)}{F_E(s)} = \frac{1}{m \cdot s^2 + D \cdot s + c}$$

- Übertragungsfunktion lässt eine Systembeschreibung und Systeminterpretation direkt im Laplace-Bereich zu, Rücktransformation kann bei einigen Aufgabenstellungen entfallen

Systeme im Laplace-Bereich

Übertragungsfunktion – Impulsantwort und Übertragungsfunktion

- Nach den Rechenregeln der Laplace-Transformation entspricht der Faltung zweier Funktionen im Zeitbereich die Multiplikation ihrer Laplace-Transformierten im Laplace-Bereich
- Ausgangssignal eines linearen, zeitinvarianten Systems berechnet sich zu

$$y(t) = \int_0^t g(\tau) \cdot u(t-\tau)\ d\tau = g(t) * u(t)$$

- Entsprechend gilt im Laplace-Bereich

$$Y(s) = G(s) \cdot U(s)$$

- Vergleich der Darstellung im Laplace- und Zeitbereich zeigt, dass die Übertragungsfunktion G(s) die Laplace-Transformierte der Impulsantwort g(t) ist

$$G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}$$

Systeme im Laplace-Bereich

Übertragungsfunktion – Impulsantwort und Übertragungsfunktion

- Alternativ kann auch die Systemantwort eines energiefreien Systems berechnet werden, das mit einem Impuls u(t) = δ(t) angeregt wird
- Laplace-Transformierte der Impulsfunktion U(s) = 1 führt zu

$$Y(s) = \frac{\sum_{m=0}^{M} b_m \cdot s^m}{\sum_{n=0}^{N} a_n \cdot s^n} \cdot 1 = G(s) \cdot 1 = G(s)$$

- Laplace-Transformierte der Sprungantwort ergibt sich mit u(t) = σ(t) und U(s) = 1/s direkt zu

$$H(s) = G(s) \cdot \frac{1}{s}$$

- Vergleich mit der bekannten Beziehung zwischen Sprung- und Impulsantwort im Zeitbereich

$$h(t) = \int_0^t g(\tau)\, d\tau$$

Systeme im Laplace-Bereich

Übertragungsfunktion – Impulsantwort und Übertragungsfunktion

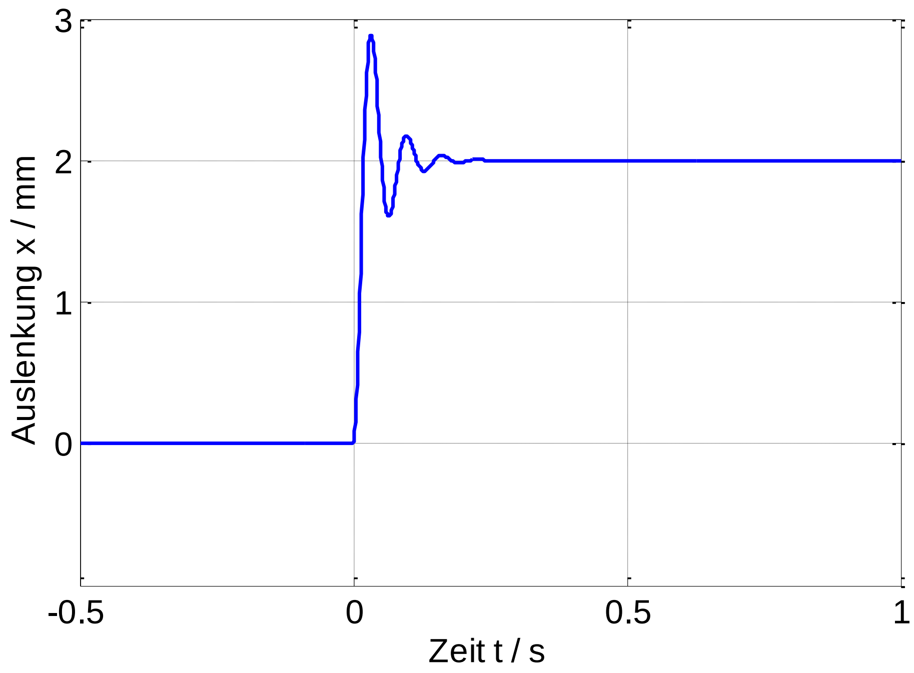
- Übertragungsfunktion lässt die System-interpretation direkt im Laplace-Bereich zu
- Verstärkung V eines Systems kann definiert werden als

$$V = \lim_{t \to \infty} h(t)$$

- Im Laplace-Bereich gilt bei konvergierender Sprungantwort

$$\lim_{t \to \infty} h(t) = \lim_{s \to 0} s \cdot H(s) = \lim_{s \to 0} s \cdot \frac{G(s)}{s} = G(0) = \frac{b_0}{a_0}$$

- Beispiel Feder-Masse-System



Systeme im Laplace-Bereich

Zusammenfassung: Übertragungsfunktion – Impulsantwort und Übertragungsfunktion

Eigenschaft	Zeitbereich	Bildbereich
Impulsantwort	$g(t) = \frac{dh}{dt}$	$G(s) = s \cdot H(s)$
Sprungantwort	$h(t) = \int_0^t g(\tau)\ d\tau$	$H(s) = G(s) \cdot \frac{1}{s}$
Verstärkung des Systems	$\lim_{t \to \infty} h(t)$	$\lim_{t \to \infty} h(t) = G(0) = \frac{b_0}{a_0}$

Systeme im Laplace-Bereich

Übertragungsfunktion – Pol-Nullstellen-Diagramme

- Wesentlich für das Systemverhalten sind Pole und Nullstellen der Übertragungsfunktion
- Zähler- und Nennerpolynom der gebrochen rationalen Übertragungsfunktion G(s) in Linearfaktorschreibweise dargestellt
- Pole α_n und Nullstellen β_m eine Vielfachheit N_n und M_m aufweisen

$$G(s) = \frac{\sum_{m=0}^{M} b_m \cdot s^m}{\sum_{n=0}^{N} a_n \cdot s^n} = k \cdot \frac{(s-\beta_1)^{M_1} \cdot (s-\beta_2)^{M_2} \ldots}{(s-\alpha_1)^{N_1} \cdot (s-\alpha_2)^{N_2} \ldots}$$

- Darstellung der Pole α_n und Nullstellen β_m in der komplexen Ebene, Nullstellen werden mit einem Kreis und Pole mit einem Kreuz dargestellt, ihre Vielfachheit N_n und M_m wird in Klammern angegeben
- Diagramme werden als Pol-Nullstellen-Diagramme oder als Pole-Zero-Plots bezeichnet

Systeme im Laplace-Bereich

Beispiel: Übertragungsfunktion – Pol-Nullstellen-Diagramme

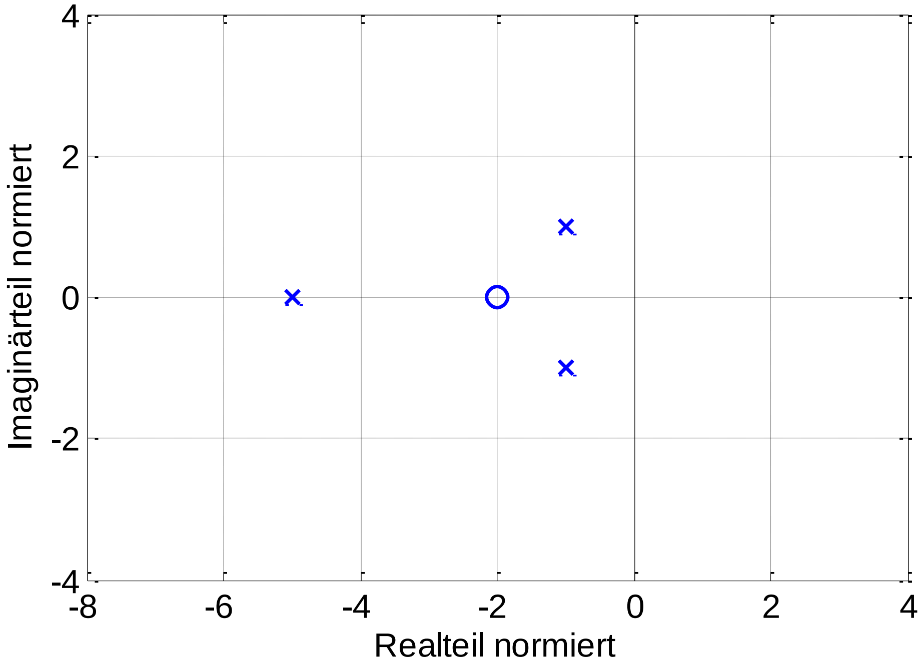
- System mit der Differentialgleichung

$$\frac{d^3y}{dt^3} + 7 \cdot \frac{d^2y}{dt^2} + 12 \cdot \frac{dy}{dt} + 10 \cdot y(t) = 2 \cdot \frac{du}{dt} + 4 \cdot u(t)$$

- Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{2 \cdot s + 4}{s^3 + 7 \cdot s^2 + 12 \cdot s + 10} = 2 \cdot \frac{(s+2)}{(s+5) \cdot (s+1-j) \cdot (s+1+j)}$$

- Übertragungsfunktion besitzt eine Nullstelle β = - 2, eine reelle Polstelle α_1 = - 5 und ein konjugiert komplexes Polpaar $\alpha_{2,3}$ = - 1 $\pm$ j



Systeme im Laplace-Bereich

Übertragungsfunktion – Zählergrad größer Nennergrad

- Differentiation eines Signals u(t) kann mathematisch beschrieben werden als

$$y(t) = \frac{du}{dt} \approx \frac{u(t+\Delta t) - u(t-\Delta t)}{2 \cdot \Delta t}$$

- Zur Berechnung der Ableitung werden Eingangssignale verwendet, die in der Zukunft liegen. Ein Differenzierer ist damit kein kausales System.
- Ist Zählergrad M größer als Nennergrad N, wird eine Polynomvision durchgeführt. Für M = N + 1 gilt:

$$G(s) = \frac{\sum_{m=0}^{N+1} b_m \cdot s^m}{\sum_{n=0}^{N} a_n \cdot s^n} = k_1 \cdot s + k_0 + \frac{\sum_{m=0}^{N-1} d_m \cdot s^m}{\sum_{n=0}^{N} a_n \cdot s^n}$$

- Summand $k_1 \cdot s$ entspricht der Differentiation des Eingangssignals, System ist für M > N nicht kausal
- Ist der Zählergrad kleiner oder gleich dem Nennergrad ($M \leq N$), ist das System kausal

Systeme im Laplace-Bereich

Übertragungsfunktion – Zählergrad gleich Nennergrad

- Für die Herleitung der Systemeigenschaften muss der Zusammenhang zwischen Impulsantwort und Übertragungsfunktion dargestellt werden
- Grundlage dazu ist eine Partialbruchzerlegung der Übertragungsfunktion, Partialbruchzerlegung ist nur möglich für den Fall, dass der Zählergrad M kleiner ist als der Nennergrad N
- Stimmen Zählergrad M und Nennergrad N überein, wird eine Polynomvision durchgeführt

$$G(s) = \frac{\sum_{m=0}^{N} b_m \cdot s^m}{\sum_{n=0}^{N} a_n \cdot s^n} = \frac{b_N}{a_N} + \frac{\sum_{m=0}^{N-1} d_m \cdot s^m}{\sum_{n=0}^{N} a_n \cdot s^n}$$

- Es ergibt sich eine Summe aus einem konstanten Faktor und einer Übertragungsfunktion, die einen Zählergrad M < N aufweist

Systeme im Laplace-Bereich

Beispiel: Übertragungsfunktion – Zählergrad gleich Nennergrad

- System besitzt die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{s+2}{s+1} = 1 + \frac{1}{s+1}$$

- Konstanter Summand der Übertragungsfunktion führt zu einem Impuls bei der Impulsantwort g(t)

$$g(t) = \delta(t) + e^{-t} \cdot \sigma(t)$$

- Bei Anregung des Systems mit einem Sprung ergibt sich im Laplace-Bereich

$$H(s) = G(s) \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s \cdot (s+1)}$$

und im Zeitbereich

$$h(t) = \sigma(t) + \left(1 - e^{-t}\right) \cdot \sigma(t)$$

- System ist sprungfähig, wenn Zählergrad M und Nennergrad N übereinstimmen, es reagiert auf einen Sprung am Eingang mit einem Sprung am Ausgang

Systeme im Laplace-Bereich

Übertragungsfunktion – Partialbrüche mit einfachen reellen Polen

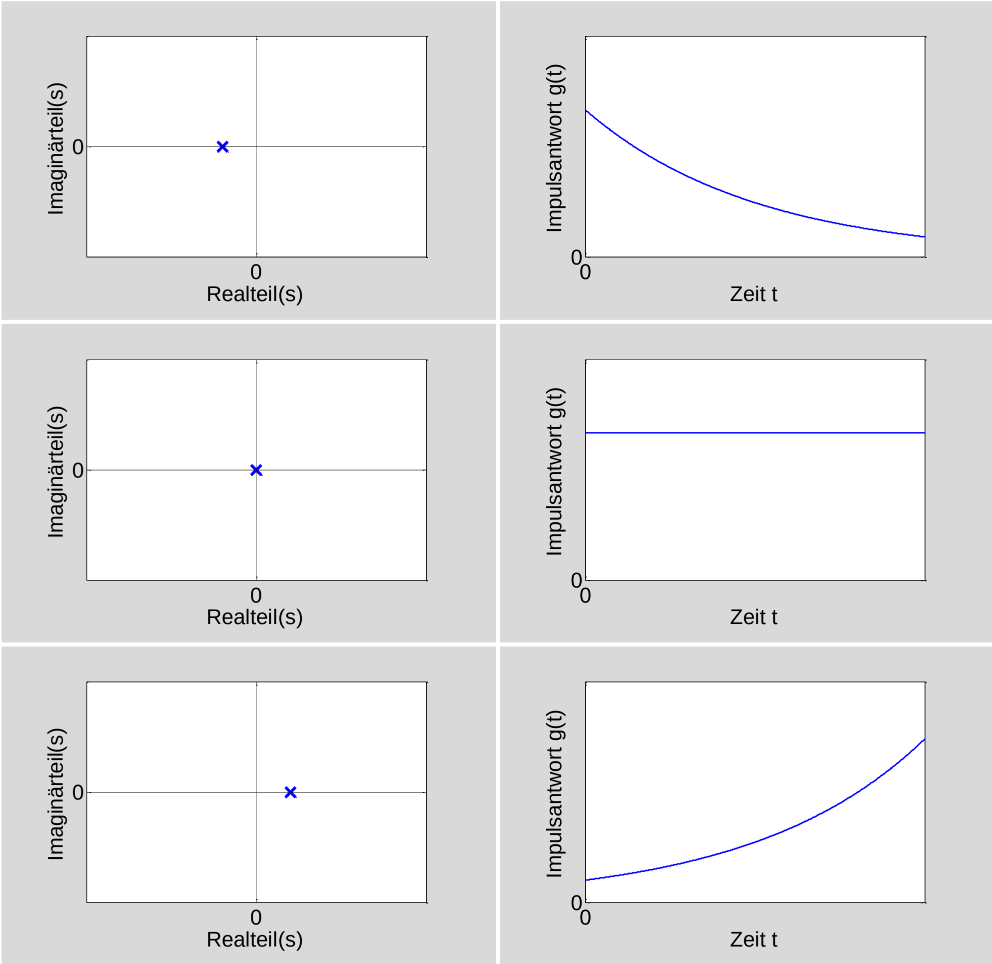
- Partialbrüche mit einem einfachen reellen Pol α_n haben die Form

$$G_n(s) = \frac{A_n}{s - \alpha_n}$$

- Zugehörige Impulsantwort

$$g_n(t) = A_n \cdot e^{\alpha_n \cdot t} \cdot \sigma(t)$$

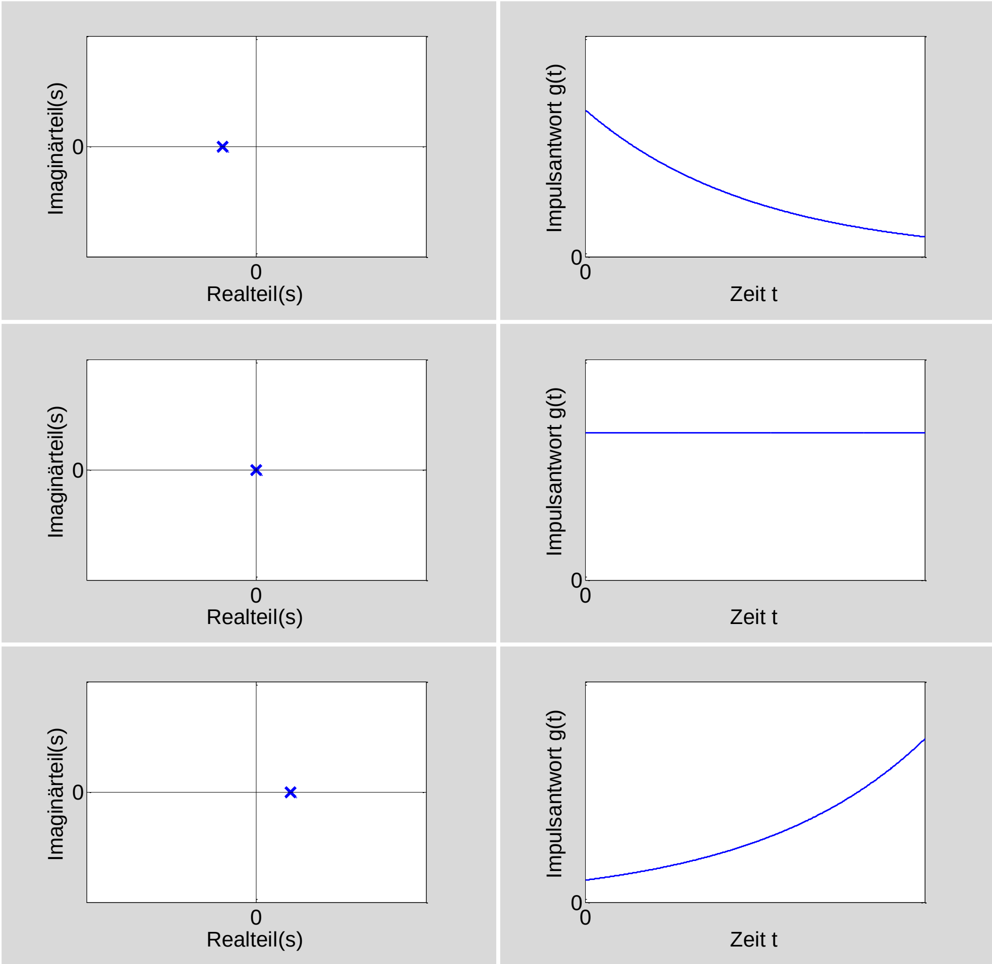
- Aus der Lage von α_n in der komplexen Ebene kann direkt geschlossen werden, ob der Betrag der zughörigen Zeitfunktion $g_n(t)$ monoton fällt, konstant bleibt oder monoton steigt



Systeme im Laplace-Bereich

Übertragungsfunktion – Partialbrüche mit einfachen reellen Polen

- Asymptotisch stabile Systeme müssen eine abklingende Impulsantwort aufweisen
- Übertragungsfunktion G(s) ist die Laplace-Transformierte der Impulsantwort g(t)
- Damit die Impulsantwort gegen null konvergiert, müssen bei einfachen reellen Polen die Pole negativ sein $\alpha_n < 0$
- Systeme mit einem einfachen Pol an der Stelle s = 0 besitzen eine konstante Impulsantwort, das System ist grenzstabil
- Systeme, bei denen mindestens ein einfacher Pol $\alpha_n > 0$ existiert, sind instabil, da die Impulsantwort divergiert
- Je größer der Betrag von α_n ist, desto schneller schwingt das System ein



Systeme im Laplace-Bereich

Beispiel: Übertragungsfunktion – Partialbrüche mit einfachen reellen Polen

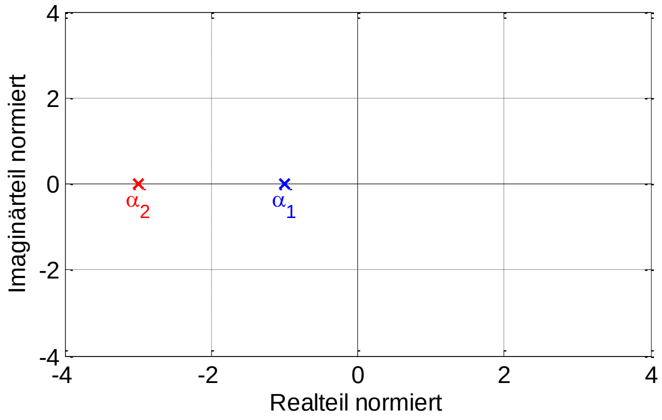
- Vergleich von Systemen mit den Übertragungsfunktionen

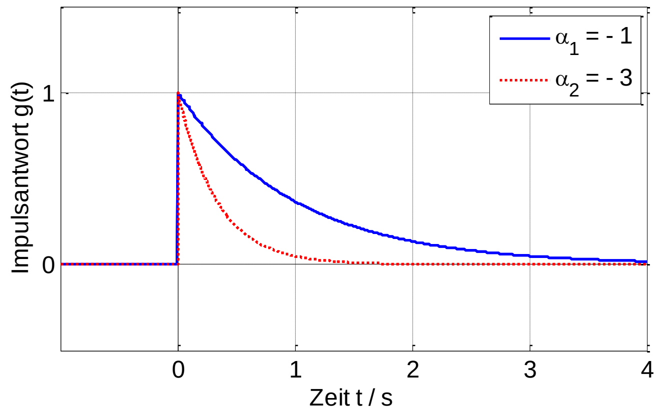
$$G_1(s) = \frac{1}{s+1} \qquad G_2(s) = \frac{1}{s+3}$$

- Impulsantworten ergeben sich zu

$$g_1(t) = e^{-1 \cdot t} \cdot \sigma(t) \qquad g_2(t) = e^{-3 \cdot t} \cdot \sigma(t)$$

- Mit steigendem Abstand des Pols vom Koordinatenursprung nimmt die Geschwindigkeit des Systems zu
- Liegt ein System mit mehreren Polen vor, bestimmt der Pol, der am nächsten am Koordinatenursprung liegt, die Systemgeschwindigkeit





Systeme im Laplace-Bereich

Übertragungsfunktion – Partialbrüche mit einfachen konjugiert komplexen Polpaaren

- Übertragungsfunktion mit einfachen konjugiert komplexen Polpaaren

$$\alpha_n = \delta_n \pm j \cdot \omega_n$$

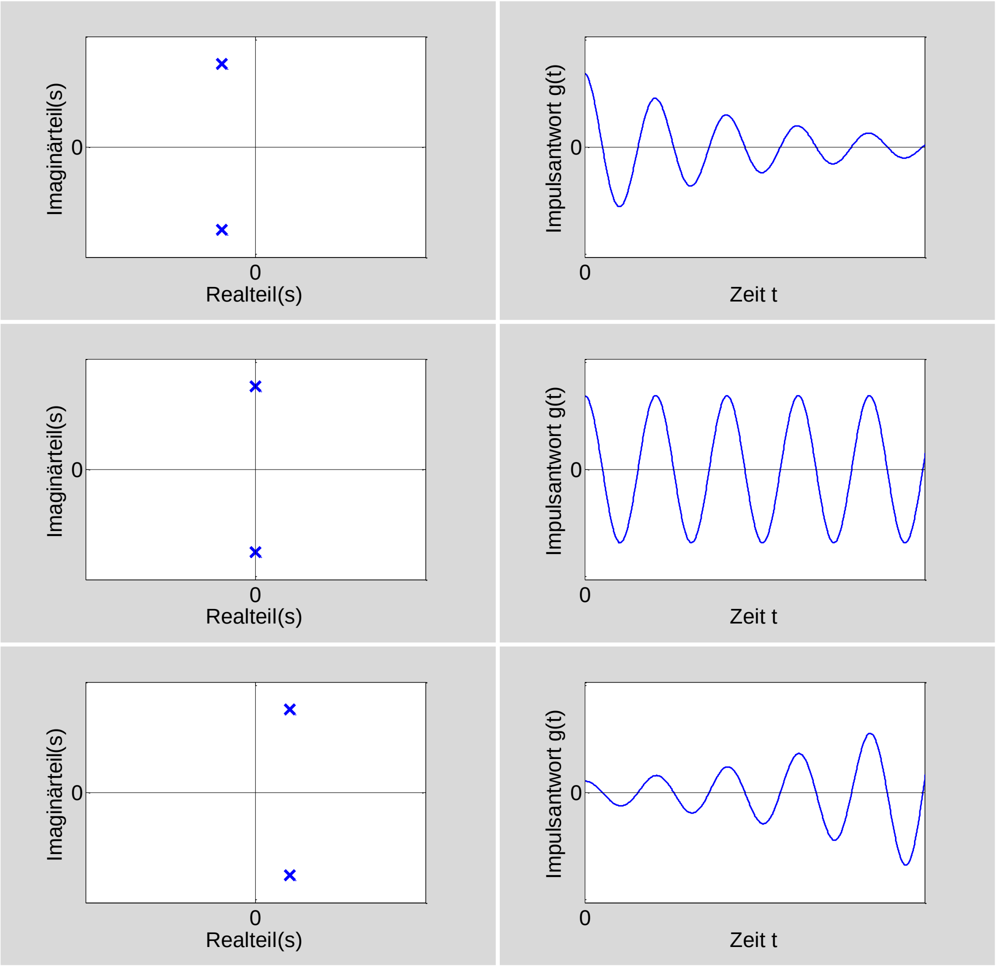
- Partialbrüche haben die Form

$$G_n(s) = \frac{b_{1n} \cdot s + b_{0n}}{(s - \delta_n)^2 + \omega_n^2}$$

- Impulsantworten haben die Form

$$g_n(t) = \left(r_n \cdot e^{j \cdot \varphi_n} \cdot e^{j \cdot \omega_n \cdot t} + r_n \cdot e^{-j \cdot \varphi_n} \cdot e^{-j \cdot \omega_n \cdot t}\right) \cdot e^{\delta_n \cdot t} \cdot \sigma(t)$$
$$= 2 \cdot r_n \cdot \cos(\omega_n \cdot t + \varphi_n) \cdot e^{\delta_n \cdot t} \cdot \sigma(t)$$

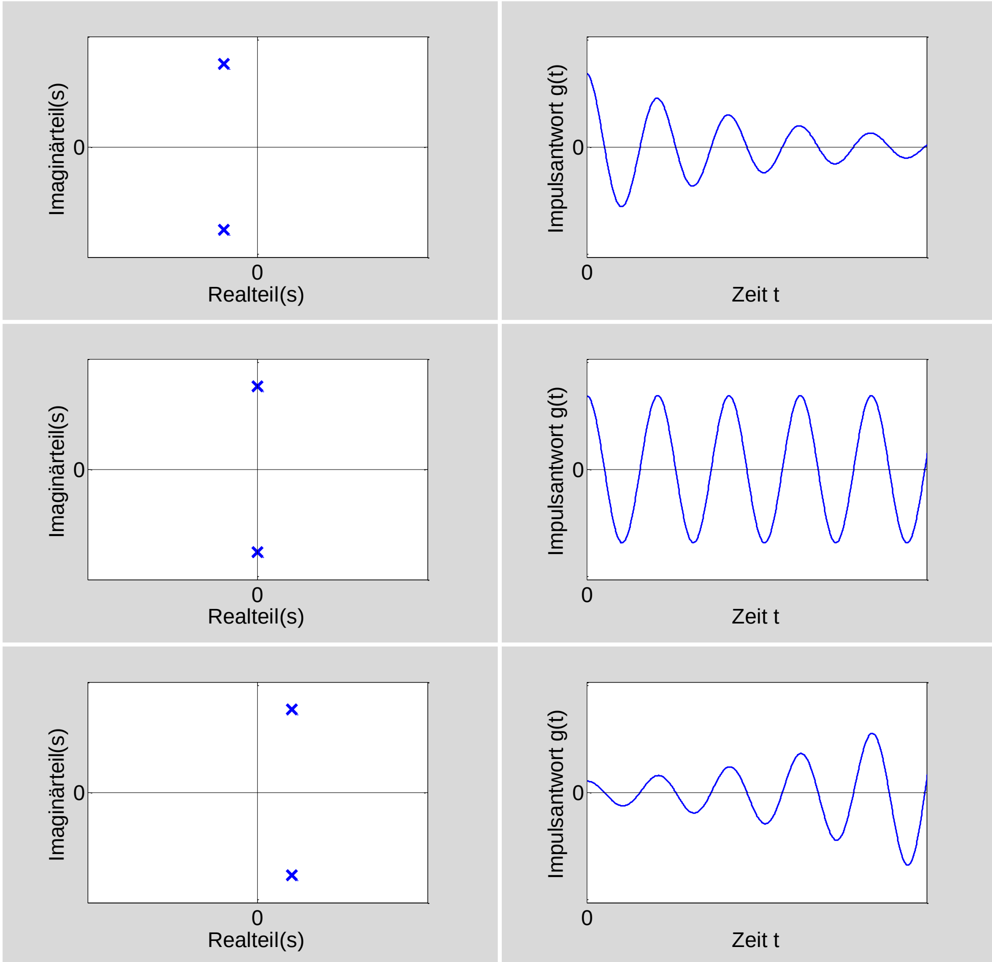
- Parameter r_n und φ_n sind von den Koeffizienten b_{1n} und b_{0n} des Zählerpolynoms abhängig



Systeme im Laplace-Bereich

Übertragungsfunktion – Partialbrüche mit einfachen konjugiert komplexen Polpaaren

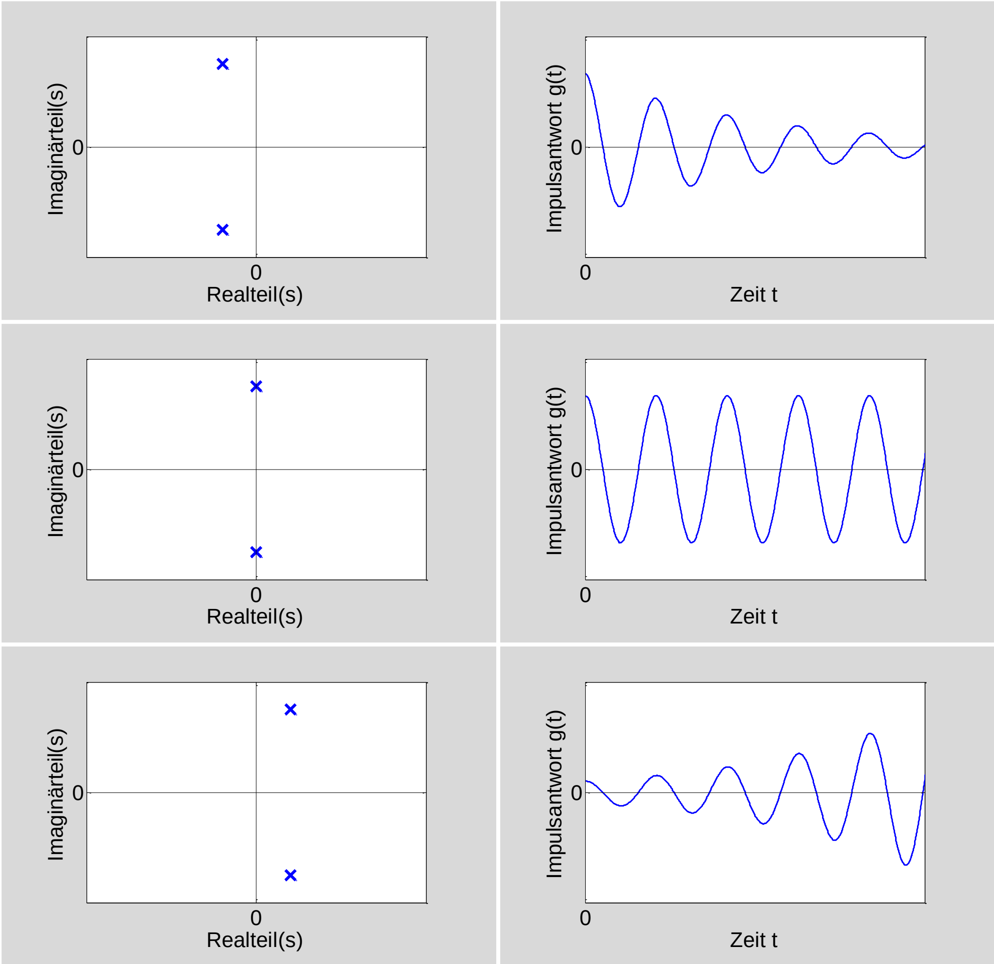
- Impulsantwort $g_n(t)$ ist im Fall konjugiert komplexer Polpaare eine Schwingung mit der Kreisfrequenz ω_n und dem Nullphasenwinkel φ_n
- Imaginärteil der Pole bei $\pm\,\omega_n$ definiert die Frequenz der Schwingung
- Bei Polen mit negativem Realteil wird die Amplitude der Impulsantwort mit wachsender Zeit kleiner
- Liegen die Pole auf der imaginären Achse, schwingt die Impulsantwort mit konstanter Amplitude
- Liegen die Pole in der rechten Halbebene, steigt die Amplitude der Impulsantwort mit wachsender Zeit an



Systeme im Laplace-Bereich

Übertragungsfunktion – Partialbrüche mit einfachen konjugiert komplexen Polpaaren

- Asymptotisch stabile Systeme müssen eine abklingende Impulsantwort aufweisen, damit die Impulsantwort gegen null konvergiert, müssen bei einfachen konjugiert komplexen Polpaaren die Pole einen negativen Realteil $\delta_n < 0$ aufweisen
- Systeme mit einem einfachen konjugiert komplexen Polpaar auf der imaginären Achse besitzen eine Impulsantwort mit konstanter Amplitude, das System ist grenzstabil
- Systeme mit einem Polpaar mit $\delta_n > 0$ sind instabil, da die Impulsantwort divergiert



Systeme im Laplace-Bereich

Beispiel: Übertragungsfunktion – Partialbrüche mit konjugiert komplexen Polpaaren

- Vergleich von Systemen mit den Übertragungsfunktionen

$$G_1(s) = \frac{5}{(s+1)^2 + 25} \qquad G_2(s) = \frac{5}{(s+3)^2 + 25}$$

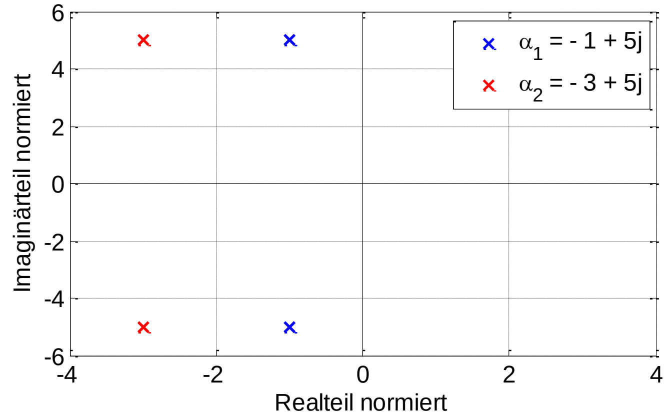
- Impulsantworten ergeben sich zu

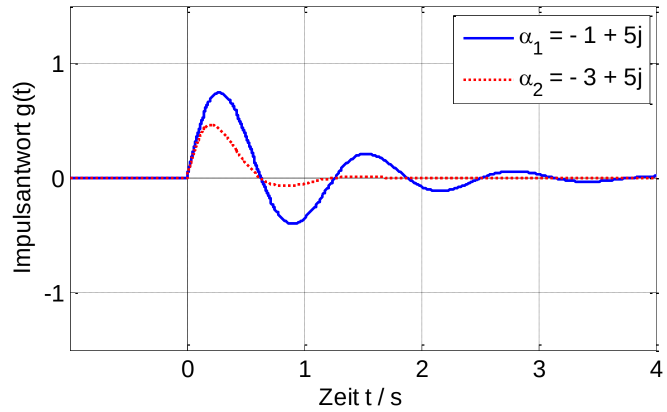
$$g_1(t) = \sin(5 \cdot t) \cdot e^{-1 \cdot t} \cdot \sigma(t)$$

und

$$g_2(t) = \sin(5 \cdot t) \cdot e^{-3 \cdot t} \cdot \sigma(t)$$

- Impulsantworten haben die gleiche Kreisfrequenz $\omega_1 = \omega_2 = 5$
- Mit steigendem Abstand des Pols vom Koordinaten-ursprung nimmt die Geschwindigkeit des Systems zu





Systeme im Laplace-Bereich

Übertragungsfunktion – Partialbrüche mit mehrfachen Polen

- Liegen mehrfache Pole vor, entstehen Partialbrüche der Form

$$G_n(s) = \frac{A_n}{(s-\alpha)^n}$$

- Zugehörige Impulsantworten

$$g_n(t) = \frac{A_n}{(n-1)!} \cdot t^{n-1} \cdot e^{\alpha \cdot t} \cdot \sigma(t)$$

- Konvergenzeigenschaften der entsprechenden Impulsantworten ändern sich für Pollagen mit negativem Realteil oder positivem Realteil nicht, weil die Exponentialfunktion schneller steigt oder fällt, als jede Potenz von t
- Weisen die Pole α_n einen Realteil $Re(\alpha_n) = 0$ auf, bleibt die Exponentialfunktion konstant, damit entscheidet der Term t^{n-1} über die Konvergenz
- Für eine Ordnung $n \geq 2$ divergiert die Impulsantwort $g_n(t)$, das System ist deshalb trotz des $Re(\alpha_n) = 0$ nicht grenzstabil sondern instabil

Systeme im Laplace-Bereich

Beispiel: Übertragungsfunktion – Partialbrüche mit mehrfachen Polen

- Vergleich von Systemen

$$G_1(s) = \frac{s}{s^2+4} \qquad G_2(s) = \frac{s}{\left(s^2+4\right)^2}$$

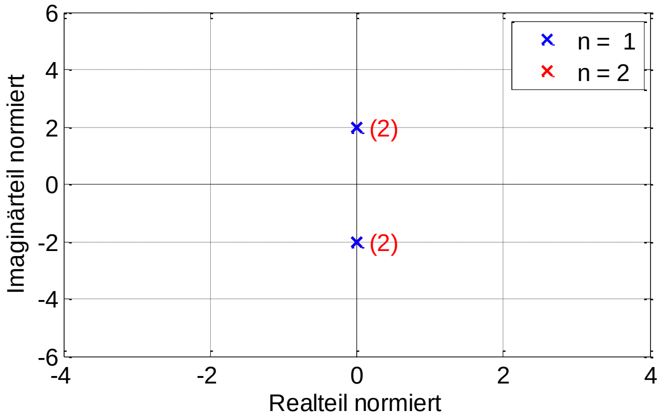
- Impulsantworten ergeben sich zu

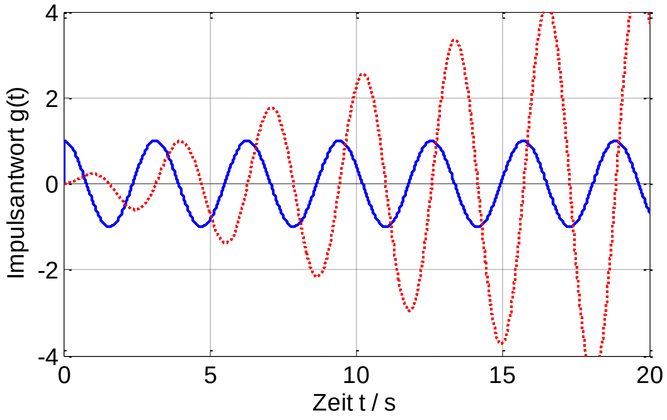
$$g_1(t) = \cos(2\cdot t)\cdot\sigma(t)$$

und

$$g_2(t) = \frac{t}{4}\cdot\sin(2\cdot t)\cdot\sigma(t)$$

- System mit dem einfachen konjugiert komplexen Polpaar (n = 1) schwingt mit konstanter Amplitude, es ist grenzstabil
- System mit dem doppelten konjugiert komplexen Polpaar (n = 2) divergiert wegen des Faktors t in der Impulsantwort, es ist instabil





Systeme im Laplace-Bereich

Übungsaufgabe: Übertragungsfunktion

- Berechnen Sie die Pole und Nullstellen der Übertragungsfunktionen

  $$G_1(s) = \frac{s+1}{s^2 + 2\cdot s + 2} \qquad G_2(s) = \frac{s^2 + 2}{(s+3)^2}$$

  und skizzieren Sie sie in der komplexen Ebene.
- Berechnen Sie die Impulsantwort g(t) und Sprungantwort h(t) und skizzieren Sie die Funktionen.
- Zu welchem Wert streben die Funktionen g(t) und h(t) für $t \to \infty$? Berechnen Sie den Wert im Zeit- und Laplace-Bereich.