Hochschule Karlsruhe
Technik und Wirtschaft
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES
Näher dran.

EIT Fakultät für Elektro- und Informationstechnik

Systemtheorie

Vorlesung 15: Interpretation der Übertragungsfunktion

Fakultät für Elektro- und Informationstechnik, Manfred Strohrmann

Systeme im Laplace-Bereich

Übertragungsfunktion – Bedeutung der Nullstellen

- Bei der Interpretation von Systemeigenschaften wird im Wesentlichen das Nennerpolynom diskutiert, Lage der Pole spielt für die Bestimmung des Einschwingverhaltens eine wesentliche Rolle
- Unter der Voraussetzung einfacher Pole ergibt sich

$$G(s) = \frac{\sum_{m=0}^{M} b_m \cdot s^m}{\sum_{n=0}^{N} a_n \cdot s^n} = \sum_{n=1}^{N} \frac{A_n}{s - \alpha_n}$$

- Nullstellen der Übertragungsfunktion oder äquivalent das Zählerpolynom der Übertragungsfunktion beeinflussen die Koeffizienten A_n, damit bestimmen sie die unterschiedlichen Gewichte, mit denen die einzelnen Partialbrüche und die damit verbunden Zeitfunktionen in die Systemantwort eingehen
- Nullstellen sind also für die Berechnung von konkreten Ausgangssignalen wesentlich, grundsätzliche Aussagen zur Stabilität und zur Schwingungsneigung eines Systems können durch die Analyse der Pole der Übertragungsfunktion G(s) getroffen werden

Systeme im Laplace-Bereich

Übertragungsfunktion – Invertierbare Systeme

- Bei der Übertragung von Signalen ist es unter Umständen erforderlich, Verzerrungen einer Übertragungsstrecke zu kompensieren, dazu wird ein System verwendet, das ein inverses Systemverhalten aufweist
- Signal wird über ein System $G_1(s)$ übertragen

$$G_1(s) = k \cdot \frac{s-\beta}{s-\alpha}$$

- Zur Kompensation wird ein System verwendet, das im Idealfall folgende Bedingung erfüllt

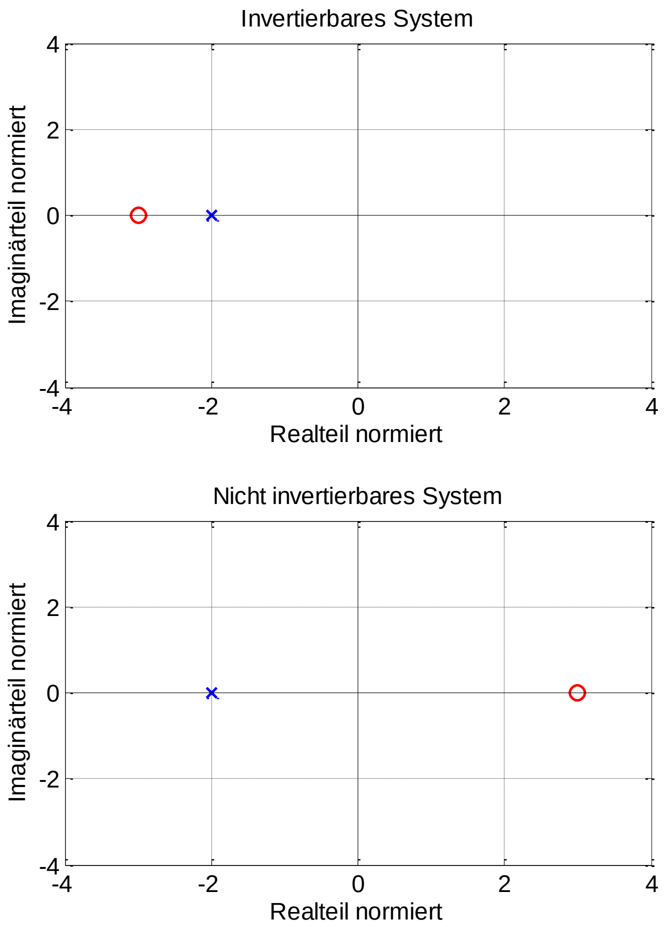
$$G_1(s) \cdot G_2(s) = 1$$

- In diesem Fall würden die Verzerrungen, die durch die Signalübertragung im System $G_1(s)$ entstanden sind, ideal kompensiert, Auflösen der Bedingung führt zu der Übertragungsfunktion

$$G_2(s) = \frac{1}{G_1(s)} = \frac{1}{k \cdot \frac{s-\beta}{s-\alpha}} = \frac{1}{k} \cdot \frac{s-\alpha}{s-\beta}$$

Übertragungsfunktion – Invertierbare Systeme

- Nullstellen der Übertragungsfunktion $G_1(s)$ werden zu Polen der inversen Übertragungsfunktion $G_2(s)$
- Das inverse System $G_2(s)$ muss stabil sein, damit es einsetzbar ist
- Ein System, dessen Verhalten vollständig kompensiert werden soll, darf nur Nullstellen innerhalb der linken Halbebene besitzen
- Beispiel für die Pol- und Nullstellenlage invertierbarer und nicht invertierbarer Systeme
  - Beide Systeme sind stabil
  - System oben ist invertierbar,
    System unten ist nicht invertierbar
- Damit beide Systeme kausal sind, müssen Zähler- und Nennergrad gleich groß sein



Systeme im Laplace-Bereich

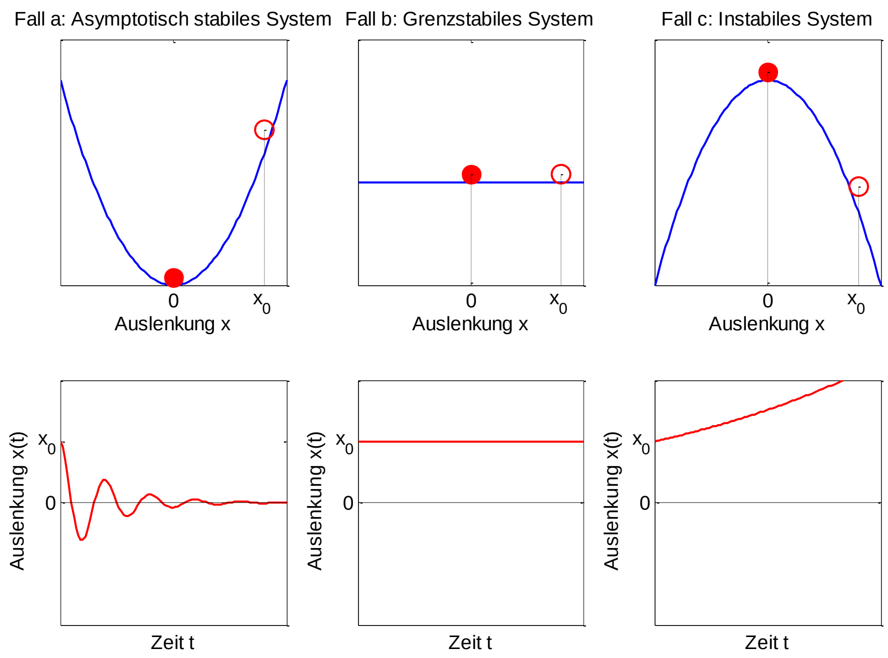
Übertragungsfunktion – Zusammenfassung Interpretation der Übertragungsfunktion

Eigenschaft	Übertragungsfunktion
Kausalität	Zählergrad M ≤ Nennergrad N
Sprungfähigkeit	Zählergrad M = Nennergrad N
Stabilität	Separate Bewertung
Schwingungsneigung	konjugiert komplexe Polpaare
Stabile invertierbare Systeme	Pole und Nullstellen in der negativen Halbebene, Zählergrad = Nennergrad
Verstärkung	Übertragungsfunktion G(s = 0)

Systeme im Laplace-Bereich

Übertragungsfunktion – Stabilitätsbewertung aufgrund der Pollage

- Bei der Einführung des Begriffes des Stabilität wird gezeigt, dass stabile Systeme eine abklingende Impulsantwort aufweisen müssen
- Übertragungsfunktion G(s) ist die Laplace-Transformierte der Impulsantwort g(t), aus der Analyse der Pollage der Übertragungsfunktion ergibt sich eine Stabilitätsbewertung
- Bedingungen für die Stabilität von Systemen ist in der folgenden Tabelle zusammengefasst
- Verfahren hat den Nachteil, dass Pole für Systemordnungen N = 3 nur noch aufwändig und für N > 3 nur numerisch ausgewertet werden können



Systeme im Laplace-Bereich

Übertragungsfunktion – Stabilitätsbewertung aufgrund der Pollage

Eigenschaft	Pole α_n der Übertragungsfunktion
Asymptotisch stabiles System	Alle Pole α_n besitzen einen negativen Realteil $Re(\alpha_n) < 0$
Grenzstabiles System	Alle Pole α_n besitzen einen negativen Realteil $Re(\alpha_n) < 0$, zusätzlich liegt mindestens ein einfacher Pole mit $Re(\alpha_n) = 0$ vor
Instabiles System	Es existiert mindestens ein Pol α_n mit positivem Realteil $Re(\alpha_n) > 0$ oder ein mehrfacher Pol mit $Re(\alpha_n) = 0$

Systeme im Laplace-Bereich

Übertragungsfunktion – Stabilitätsbewertung mit dem Hurwitz-Kriterium

- Hurwitz-Polynom ist ein Polynom mit reellen Koeffizienten a_n, dessen Nullstellen alle einen negativen Realteil aufweisen
- Zum Nachweis der Stabilität eines System muss deshalb geprüft werden, ob das Nennerpolynom

  $$N(s) = \sum_{n=0}^{N} a_n \cdot s^n = a_0 + a_1 \cdot s + a_2 \cdot s^2 + \ldots + a_N \cdot s^N$$

  ein Hurwitz-Polynom ist, in dem Fall besitzt die Übertragungsfunktion des Systems nur Pole in der negativen Halbebene, und das System ist stabil
- Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann davon ausgegangen werden, dass der Koeffizient $a_N = 1$ ist, andernfalls wird durch den Koeffizienten dividiert
- Damit das Polynom ein Hurwitz-Polynom ist, müssen nach der Normierung alle Koeffizienten positiv sein, ist ein Koeffizient negativ oder null, weist das System eine Polstelle auf, deren Realteil nicht negativ ist, es ist damit grenzstabil oder instabil

Systeme im Laplace-Bereich

Übertragungsfunktion – Stabilitätsbewertung mit dem Hurwitz-Kriterium

- Bedingung, dass die Koeffizienten positiv sind, ist notwendig, für den Fall eines Polynoms erster oder zweiter Ordnung auch hinreichend
- Für eine Ordnung für $N \geq 3$ reicht diese Bedingung nicht aus, für den Nachweis muss die Hurwitz-Determinante ausgewertet werden, sie besteht aus den Koeffizienten a_n des zu untersuchenden Nennerpolynoms
- Wird mit $H_{N,n}$ die n-te Unterdeterminante einer Hurwitz-Determinante H_N bezeichnet, muss für $n = 1 \ldots N$ folgende Bedingung geprüft werden

  $$H_{N,n} > 0$$

- Polynom ist in dem Fall ein Hurwitz-Polynom und das System ist asymptotisch stabil

$$H_N = \begin{vmatrix} a_{N-1} & a_{N-3} & a_{N-5} & a_{N-7} & \cdots & 0 \\ a_N & a_{N-2} & a_{N-4} & a_{N-6} & \cdots & 0 \\ 0 & a_{N-1} & a_{N-3} & a_{N-5} & \cdots & 0 \\ 0 & a_N & a_{N-2} & a_{N-4} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_0 \end{vmatrix}$$

Systeme im Laplace-Bereich

Übertragungsfunktion – Stabilitätsbewertung mit dem Hurwitz-Kriterium

- Hurwitz-Determinante für die Ordnung N = 3 mit allgemeinen Koeffizienten
- Zusammenstellung aller Unterdeterminanten $H_{3,1}$, $H_{3,2}$ und $H_{3,3}$
- Unterdeterminante $H_{3,3}$ kann über die Entwicklung nach der dritten Spalte auf die Unterdeterminante $H_{3,2}$ zurückgeführt werden
- Da $a_0 > 0$ ist, muss die Determinante $H_{3,3}$ nicht separat geprüft werden

$$H_3 = \begin{vmatrix} a_2 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_2 & a_0 \end{vmatrix}$$

$$H_{3,1} = a_2 > 0$$

$$H_{3,2} = \begin{vmatrix} a_2 & a_0 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix} = a_2 \cdot a_1 - a_0 \cdot a_3 > 0$$

$$H_{3,3} = \begin{vmatrix} a_2 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} = H_2 \cdot a_0$$

Systeme im Laplace-Bereich

Beispiel: Übertragungsfunktion – Stabilitätsbewertung mit dem Hurwitz-Kriterium

- Verdeutlichung an dem Beispiel

$$G(s) = \frac{1}{s^3 + 2 \cdot s^2 + 11 \cdot s + 10}$$

- Hurwitz-Determinanten ergeben sich zu

$$H_{3,1} = \left| a_2 \right| = 2 > 0$$

$$H_{3,2} = \begin{vmatrix} a_2 & a_0 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 10 \\ 1 & 11 \end{vmatrix} = 22 - 10 = 12 > 0$$

$$H_{3,3} = \begin{vmatrix} a_2 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} = H_{3,2} \cdot a_0 = H_{3,2} \cdot 10 = 120 > 0$$

- Alle Determinanten sind größer als null, das System ist stabil

Systeme im Laplace-Bereich

Übertragungsfunktion – Stabilitätsbewertung mit dem Hurwitz-Kriterium

- Einschaltverhalten eines Lautsprechers kann beschrieben werden über die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{k_m}{s^3 \cdot (L \cdot m) + s^2 \cdot (R \cdot m + L \cdot D) + s \cdot \left(R \cdot D + L \cdot c + {k_m}^2\right) + (R \cdot c)}$$

- Stabilitätsanalyse mit Hurwitz-Determinanten

$$H_{3,1} = |a_2| = (R \cdot m + L \cdot D) > 0$$

$$H_{3,2} = \begin{vmatrix} a_2 & a_0 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} R \cdot m + L \cdot D & R \cdot c \\ L \cdot m & R \cdot D + L \cdot c + {k_m}^2 \end{vmatrix} = (R \cdot m + L \cdot D) \cdot \left(R \cdot D + L \cdot c + k_m^2\right) - (R \cdot c) \cdot (L \cdot m)$$

$$= R \cdot m \cdot R \cdot D + L \cdot D \cdot R \cdot D + R \cdot m \cdot L \cdot c + L \cdot D \cdot L \cdot c + R \cdot m \cdot k_m^2 + L \cdot D \cdot k_m^2 - R \cdot c \cdot L \cdot m$$

$$= R^2 \cdot m \cdot D + L \cdot D^2 \cdot R + L^2 \cdot D \cdot c + R \cdot m \cdot k_m^2 + L \cdot D \cdot k_m^2 > 0$$

$$H_{3,3} = H_{3,2} \cdot a_0 > 0$$

Systeme im Laplace-Bereich

Übertragungsfunktion – Stabilitätsbewertung mit dem Hurwitz-Kriterium

- Determinante H_1 ist größer als null, weil alle Größen größer als null sind, das Produkt von zwei Größen größer als null und die Summe dieser Produkte größer als null ist

$$H_1 = a_2 = \left(R \cdot m + L \cdot D\right) > 0$$

- Determinante H_2 ist aus denselben Gründen wie die Determinante H_1 größer als null

$$H_2 = R^2 \cdot m \cdot D + L \cdot D^2 \cdot R + L^2 \cdot D \cdot c + R \cdot m \cdot k_m^2 > 0$$

- Koeffizient a_0 ist größer als null ist, damit ist auch die Determinante H_3 größer als null

$$H_3 = H_2 \cdot a_0 > 0$$

- Hurwitz-Kriterium kann bei Systemen höherer Ordnung trotz fehlender Zahlenwerte dazu verwendet werden, die Stabilität von Systemen zu prüfen

Systeme im Laplace-Bereich

Übungsaufgabe: Übertragungsfunktion – Stabilitätsbewertung mit dem Hurwitz-Kriterium

- Geben Sie für die Systeme mit den Übertragungsfunktionen

$$G_1(s) = \frac{s^2 + 3}{s^3 + 3 \cdot s^2 + (3 + a) \cdot s + (1 - a)}$$

$$G_2(s) = \frac{1}{s^3 + a \cdot s^2 + 2 \cdot s + 3}$$

$$G_3(s) = \frac{s^2 + 2}{s^3 - 2 \cdot a \cdot s^2 + (1 - a) \cdot s + 1}$$

  den Werteberich von a an, für den die Systeme stabil sind

- Skizzieren Sie den Bereich auf einem Zahlenstrahl

Systeme im Laplace-Bereich

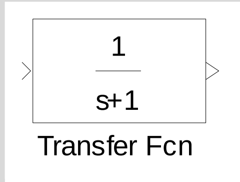
Übertragungsfunktion – Systeminterpretation mit MATLAB

Befehl	Beschreibung
G = tf([bM … b0],[aN … a0]);	Definition der Übertragungsfunktion über Zähler- und Nennerpolynom
zero(G)	Berechnung der Nullstellen der Übertragungsfunktion
pole(G)	Berechnung der Pole der Übertragungsfunktion
pzmap(G)	Darstellung der Pole und Nullstellen in der s-Ebene
impulse(G)	Berechnung / Darstellung der Impulsantwort
step(G)	Berechnung / Darstellung der Sprungantwort

Systeme im Laplace-Bereich

Übertragungsfunktion – Systemsimulation mit Simulink

- Neben fest definierten Übertragungsgliedern wie Differenzierer und Integrierer bietet Simulink die Möglichkeit, Übertragungsglieder über ihre Laplace-Transformierte zu definieren
- Übertragungsglieder können als gebrochen rationale Funktion oder in Linearfaktor-Schreibweise definiert werden
- Auswahl von Blöcken für zeitkontinuierliche Übertragungsfunktionen
- Anwendung der MATLAB und Simulink-Befehle am Beispiel eines Feder-Masse-Systems

Übertragungsfunktion	Simulink Symbol
Gebrochen rationale Übertragungsfunktion mit Polynomen	
Gebrochen rationale Übertragungsfunktion mit Linearfaktoren