Hochschule Karlsruhe
Technik und Wirtschaft
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES
Näher dran.

EIT Fakultät für Elektro- und Informationstechnik

Systemtheorie

Vorlesung 17: Spektren periodischer Signale

Fakultät für Elektro- und Informationstechnik, Manfred Strohrmann

Spektrum von Signalen

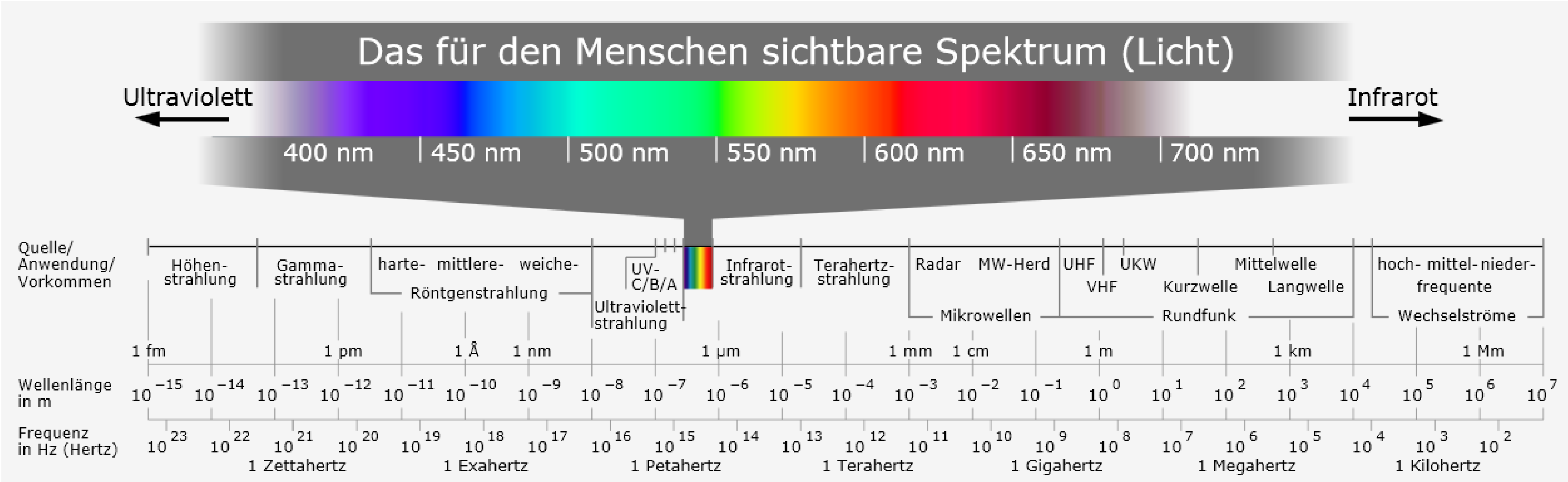
Spektren von Signalen – Einführung

- Signale können auf unterschiedliche Arten beschrieben werden
  - Zeitbereich
  - Laplace-Bereich
- Frequenzbereich wird als weitere Beschreibungsform für Signale und Systeme vorgestellt
  - Beschreibung von Signalen über ein sogenanntes Spektrum
  - Beschreibung von Systemen über einen sogenannten Frequenzgang
- Vorteile der Beschreibung im Frequenzbereich
  - Physikalische Eigenschaften wie die farbliche Zusammensetzung des Lichtes oder die Zusammensetzung eines Tones aus verschiedenen Schwingungen können im Frequenzbereich transparent und übersichtlich dargestellt werden
  - Ausgangssignal von Systemen, die über eine Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten beschrieben werden, lässt sich für harmonische Eingangssignale vergleichsweise anschaulich beschreiben

Spektrum von Signalen

Spektren von Signalen – Spektrale Zusammensetzung von Licht

- Begriff des Spektrums ist mit Licht verbunden, Licht ist der Teil des elektromagnetischen Spektrums, der durch das menschliche Auge direkt wahrgenommen werden kann

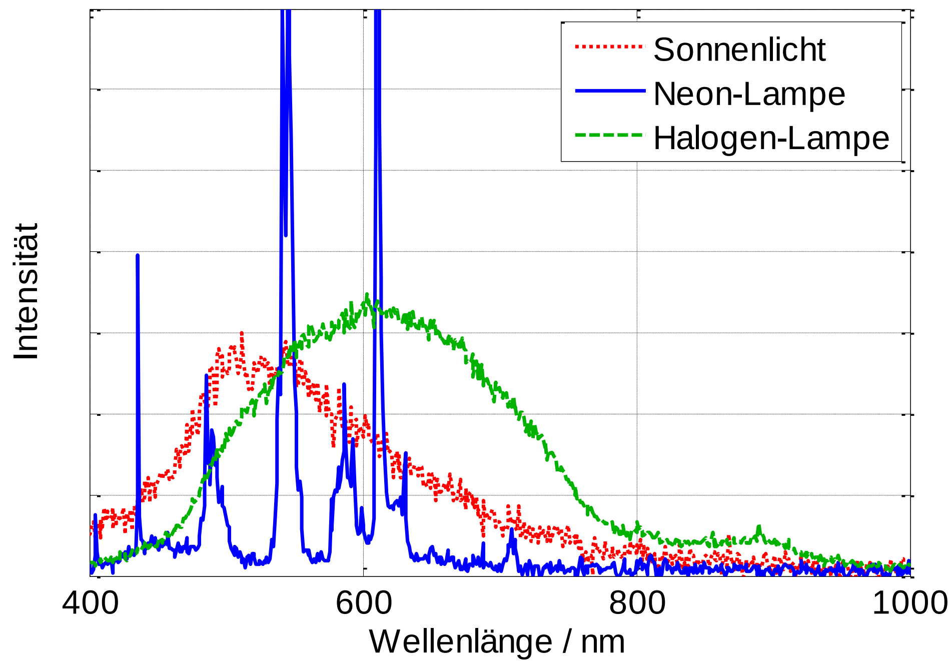


- Wellenlängen-Bereich des Lichtspektrums reicht von ungefähr 380 bis 780 nm, Frequenzbereich von ca. $3.8 \cdot 10^{14}$ bis $7.9 \cdot 10^{14}$ Hz

Spektrum von Signalen

Spektren von Signalen – Spektrale Zusammensetzung von Licht

- Sichtbares Lichtspektrum ist die Menge aller vom Auge unterscheidbaren Spektralfarben, sie überlagern sich im Auge und führen zu einem Farbeindruck des betreffenden Körpers
- Unterschiedliche Lichtquellen haben eine unterschiedliche spektrale Zusammensetzung
- Vergleich des Spektrums für Sonnenlicht sowie des Lichts einer Neon-Lampe und einer Halogen-Lampe
- Obwohl das menschliche Auge alle drei verwendeten Lichtquellen weitgehend als weiße Lichtquellen wahrnimmt, unterscheiden sie sich in ihrem Spektrum
- Sie haben charakteristische Spektrallinien, die die Lichtintensität bei definierten Frequenzen beschreiben

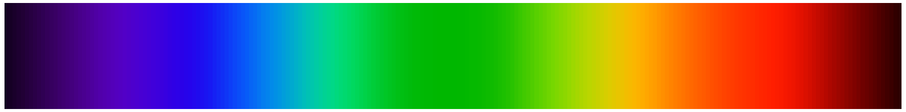


Spektrum von Signalen

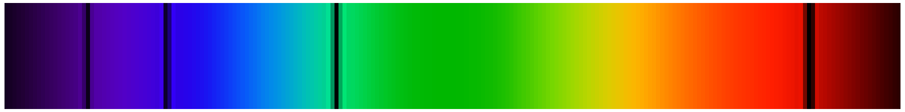
Beispiel: Spektren von Signalen – Spektroskopie

- Spektroskopie als Anwendungsfall für Spektralanalysen
- Zur Charakterisierung von Materialien wird eine Probe von Licht durchstrahlt und das Spektrum des Lichtes vor und nach der Probe bestimmt
- Einzelne Spektrallinien repräsentieren das Licht einer genau definierten Frequenz, das von einem Atom oder Molekül aufgrund eines quantenmechanischen Übergangs abgegeben oder absorbiert werden kann
- In Abhängigkeit des vorliegenden Stoffes werden charakteristische Spektralanteile von dem ursprünglich kontinuierlichen Spektrum absorbiert, nach der Absorption fehlen sie in dem Spektrum

Spektrum des Lichtes vor der Probe



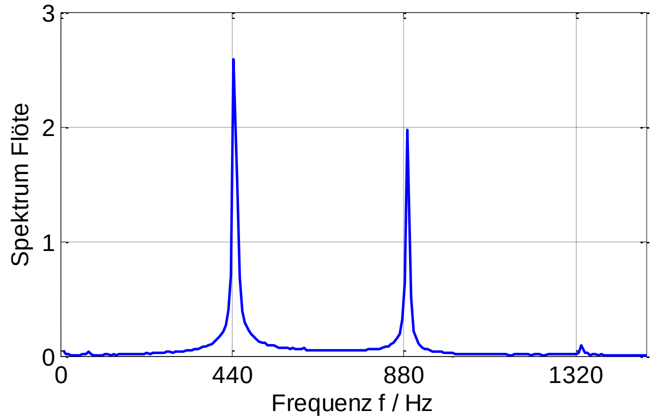
Spektrum des Lichtes nach der Probe

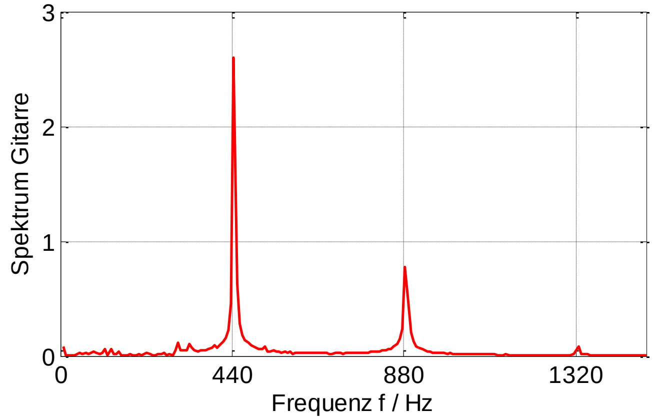


Spektrum von Signalen

Beispiel: Spektren von Signalen – Vergleich von unterschiedlichen Instrumenten

- Identisch gestimmte Musikinstrumente geben den Kammerton a mit derselben Frequenz wieder
- Trotzdem unterscheidet sich der Ton a einer Gitarre und der Ton einer Querflöte von seinem Klang her
- Deutlich zu erkennen ist bei beiden Spektren ein Maximum bei der Grundschwingung mit der Frequenz f_0 = 440 Hz
- Töne haben zusätzlich Spektralanteile, insbesondere Oberschwingungen mit Frequenzen $k \cdot f_0$, die Ursache für die unterschiedlichen akustischen Eindrücke der Instrumente sind





Spektrum von Signalen

Spektren von Signalen – Reaktion von Systemen auf harmonische Anregungen

- Neben physikalischen Gründen gibt es mathematische Gründe, Signale für systemtheoretische Aufgabenstellungen im Spektralbereich zu beschreiben
- Vorteil wird an einem RC-Glied aufgezeigt, Beschreibung mit der Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{U_A(s)}{U_E(s)} = \frac{1}{1 + R \cdot C \cdot s}$$

- Anregung mit einem kausalen, harmonischen Signal

$$u_E(t) = U_{E0} \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t} \cdot \sigma(t)$$

- Berechnung des Ausgangssignals im Laplace-Bereich

$$U_A(s) = \frac{1}{1 + R \cdot C \cdot s} \cdot U_{E0} \cdot \frac{1}{s - j \cdot \omega} = \frac{-U_{E0} \cdot R \cdot C}{1 + j \cdot \omega \cdot R \cdot C} \cdot \frac{1}{1 + R \cdot C \cdot s} + \frac{U_{E0}}{1 + j \cdot \omega \cdot R \cdot C} \cdot \frac{1}{s - j \cdot \omega}$$

Spektrum von Signalen

Spektren von Signalen – Reaktion von Systemen auf harmonische Anregungen

- Rücktransformation führt zu dem Ausgangssignal

$$u_A(t) = \frac{-U_{e0}}{1+j\cdot\omega\cdot R\cdot C}\cdot e^{-\frac{t}{R\cdot C}}\cdot\sigma(t) + \frac{U_{e0}}{1+j\cdot\omega\cdot R\cdot C}\cdot e^{j\cdot\omega\cdot t}\cdot\sigma(t)$$

$$= \frac{-U_{e0}}{1+j\cdot\omega\cdot R\cdot C}\cdot e^{-\frac{t}{R\cdot C}}\cdot\sigma(t) + \frac{U_{e0}}{\sqrt{1+\omega^2\cdot R^2\cdot C^2}}\cdot e^{j\cdot(\omega\cdot t+\varphi(\omega))}\cdot\sigma(t)$$

- Ausgangssignal besteht aus einem Einschwinganteil und einer harmonischen Schwingung konstanter Amplitude, Amplituden und Phase ergeben sich aus den Gleichungen

$$U_{A0} = U_{E0}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2\cdot R^2\cdot C^2}} \qquad \varphi(\omega) = -\arctan(\omega\cdot R\cdot C)$$

- Für den Fall einer harmonischen Anregung müssen demnach nur das Verhältnis der Ein- und Ausgangs-amplitude sowie die Phasenverschiebung bestimmt werden, beide Größen sind von der Kreis-frequenz ω abhängig

Spektrum von Signalen

Spektren von Signalen – Reaktion von Systemen auf harmonische Anregungen

- Vorgehen ist vergleichbar zur Wechselstromtechnik
- Amplitudengang als Verhältnis der Amplituden von Ein- und Ausgangssignal

$$A(\omega) = \frac{|U_A(\omega)|}{|U_E(\omega)|}$$

- Phasengang als Phasenverschiebung zwischen Ein- und Ausgangssignal

$$\varphi(\omega) = \varphi_A(\omega) - \varphi_E(\omega)$$

- Wird ein LTI-System mit einem harmonischen Signal angeregt, antwortet es nach dem Einschwingvorgang mit einem harmonischen Signal gleicher Frequenz, Änderung der Amplitude und Phase kann vergleichsweise einfach beschrieben werden
- Wird ein Signal x(t) in viele harmonische Schwingungen unterschiedlicher Frequenz zerlegt und für jede dieser Schwingungen das Ausgangssignal nach dieser Methode berechnet, ergibt sich das Ausgangsignal y(t) bei linearen Systemen aus der Überlagerung der einzelnen Systemantworten
- Überlegung führt zur Fourier-Reihe und Fourier-Transformation

Spektrum von Signalen

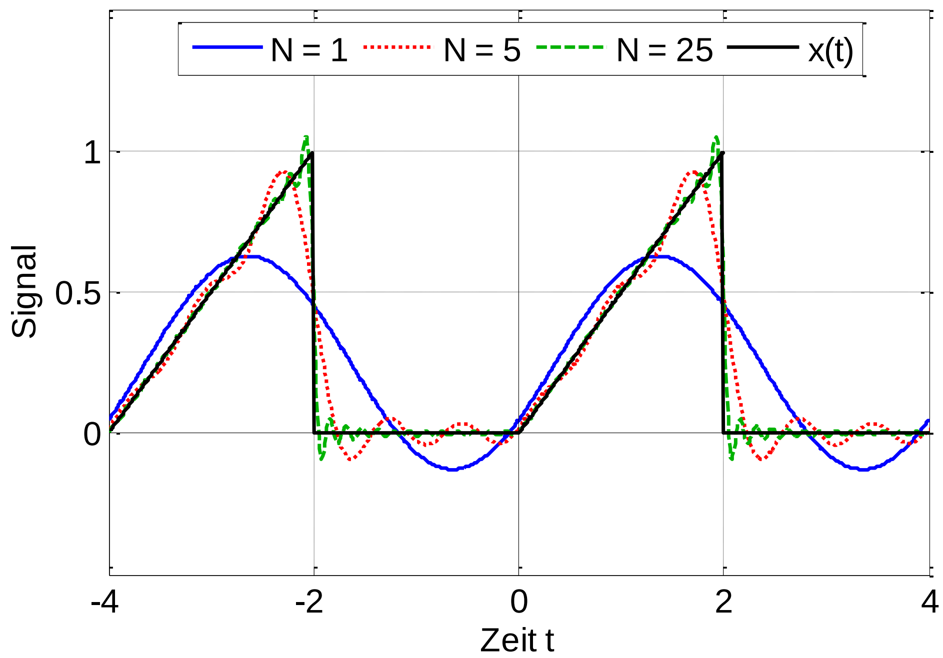
Fourier-Reihe – Definition der komplexen Fourier-Reihe

- Ausgangspunkt für eine Fourier-Reihe ist der Versuch, ein periodisches Signal x(t) durch eine Überlagerung von harmonischen Schwingungen zu beschreiben

$$x(t) \approx \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \cdot e^{j \cdot n \cdot \omega_0 \cdot t}$$

- Approximation des Signals x(t) erfolgt über eine Summe von harmonischen Funktionen mit der Kreisfrequenz ω_0 und Vielfachen der Kreisfrequenz $n \cdot \omega_0$

- Koeffizienten A_n der harmonischen Schwingungen werden als Fourier-Koeffizienten bezeichnet, sie geben an, mit welchem Gewicht die unterschiedlichen harmonischen Funktionen eingehen



Spektrum von Signalen

Fourier-Reihe – Definition der komplexen Fourier-Reihe

- Koeffizienten A_n sind komplex, sie besitzen einen Betrag und eine Phase
- Kreisfrequenz ω_0 ergibt sich aus der Periodendauer T_0 des periodischen Signals

$$\omega_0 = \frac{2 \cdot \pi}{T_0}$$

- Approximation des periodischen Signals x(t) ist nicht perfekt, es ergibt sich eine Abweichung zwischen dem Signal und der Approximation
- Komplexe Fourier-Koeffizienten c_n werden so bestimmt, dass der mittlere quadratische Fehler

$$E\left(A_n\right) = \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \cdot e^{j \cdot n \cdot \omega_0 \cdot t} - x\left(t\right) \right)^2 \, dt$$

minimal wird, dazu müssen die partiellen Ableitungen des Fehlers nach den zu bestimmenden Koeffizienten zu null werden

Spektrum von Signalen

Fourier-Reihe – Definition der komplexen Fourier-Reihe

- Aus dieser Bedingung ergibt sich eine Bestimmungsgleichung für die komplexen Fourier-Koeffizienten A_n

$$A_n = \frac{1}{T_0} \cdot \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) \cdot e^{-j \cdot n \cdot \omega_0 \cdot t} \, dt$$

der komplexen Fourier-Reihe

$$x(t) \approx \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \cdot e^{j \cdot n \cdot \omega_0 \cdot t}$$

- Fourier-Reihe besitzt nach ihrer Definitionsgleichung unendlich viele Summanden, zur numerischen Approximation periodischer Funktionen wird jedoch häufig eine endliche Summe verwendet
- Werden die Summanden mit den Indizes $-N \leq n \leq N$ verwendet, ergibt sich eine Fourier-Reihe der Ordnung N

$$x_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} A_n \cdot e^{j \cdot n \cdot \omega_0 \cdot t}$$

Spektrum von Signalen

Beispiel: Fourier-Reihe – Definition der komplexen Fourier-Reihe

- Das in $T_0 = 4$ periodische Signal x(t) soll über eine Fourier-Reihe approximiert werden

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } -2 \leq t < 0 \\ t/2 & \text{für } 0 \leq t < 2 \end{cases}$$

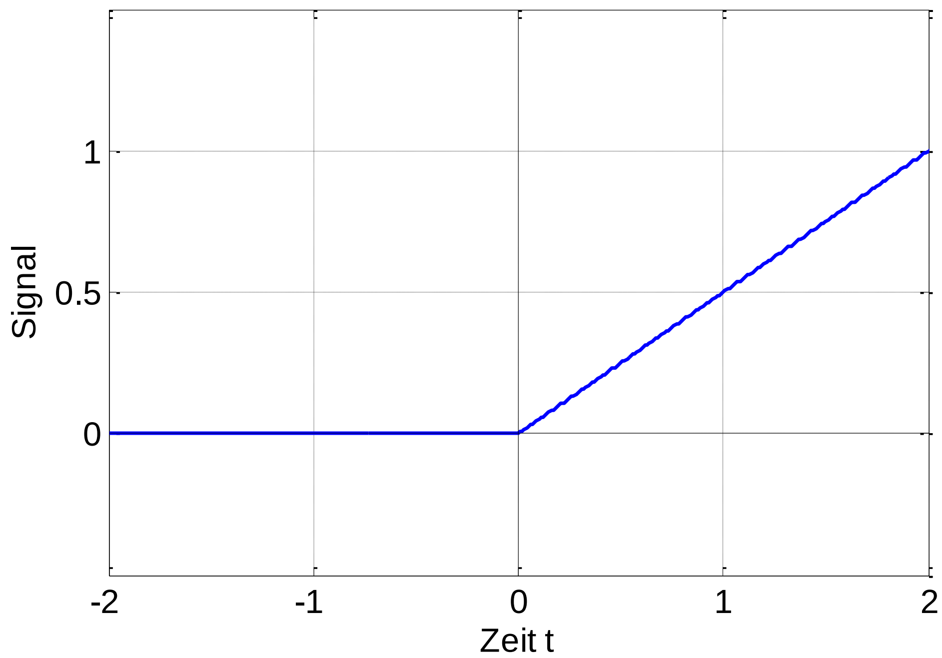
- Berechnen Sie die Fourier-Koeffizienten

$$A_n = \frac{1}{T_0} \cdot \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) \cdot e^{-j \cdot n \cdot \omega_0 \cdot t} \, dt$$

der komplexen Fourier-Reihe

- Hinweis

$$\int t \cdot e^{a \cdot t} \, dt = \frac{a \cdot t - 1}{a^2} \cdot e^{a \cdot t}$$



Spektrum von Signalen

Beispiel: Fourier-Reihe – Definition der komplexen Fourier-Reihe

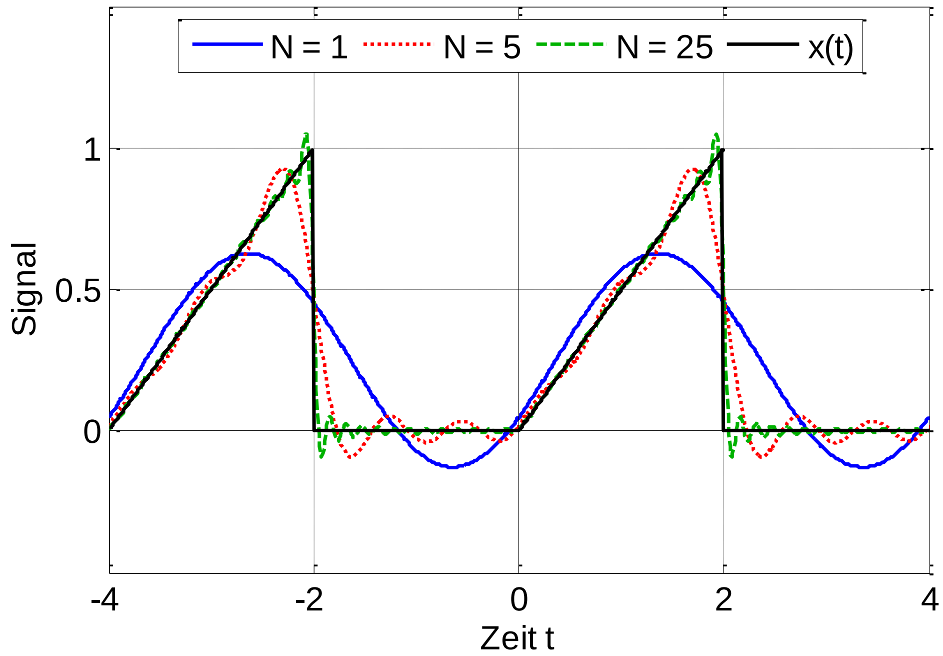
- Fourier-Koeffizienten ergeben sich zu

$$A_n = \frac{1}{2\cdot(n\cdot\pi)^2}\cdot\left(\left(-1\right)^n - 1 + j\cdot n\cdot\pi\cdot\left(-1\right)^n\right)$$

  bzw. für n = 0

$$A_0 = \frac{1}{T_0}\cdot\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)\,dt = \frac{1}{4}\cdot\int_0^2 \frac{t}{2}\,dt = \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2}\cdot\tau^2\Big|_0^2 = \frac{1}{4}$$

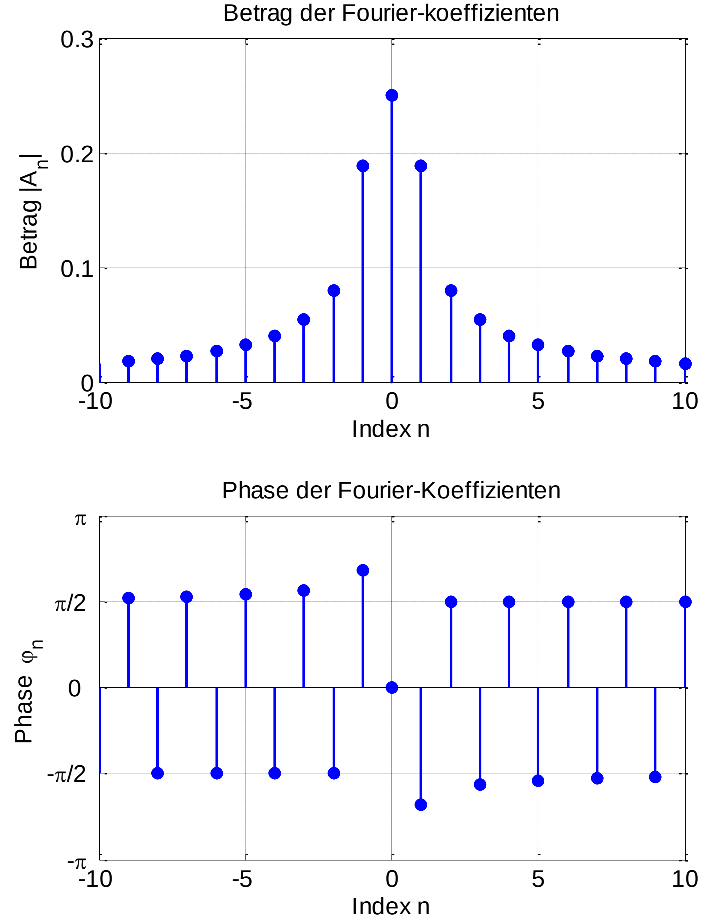
- Koeffizient A_0 entspricht dem Mittelwert über eine volle Periode
- Güte der Approximation steigt mit zunehmender Ordnung N der Fourier-Reihe



Spektrum von Signalen

Beispiel: Fourier-Reihe – Definition der komplexen Fourier-Reihe

- Spektrum des periodischen Signals x(t) setzt sich aus den komplexen Fourier-Koeffizienten zusammen, sie haben einen Betrag und eine Phase
- Betrag nimmt mit steigendem Betrag des Index n ab
- Je schneller die Fourier-Koeffizienten gegen null gehen, desto besser kann das periodische Signal x(t) mit der Fourier-Reihe approximiert werden
- Phasenwinkel sind punktsymmetrisch, was auf konjugiert komplexe Fourier-Koeffizienten hinweist, Fourier-Koeffizienten A_n und A_{-n} eines reellen Signals sind immer konjugiert komplex zueinander



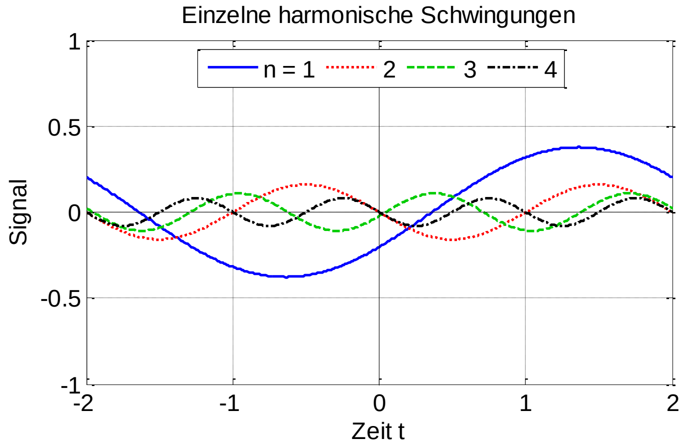
Spektrum von Signalen

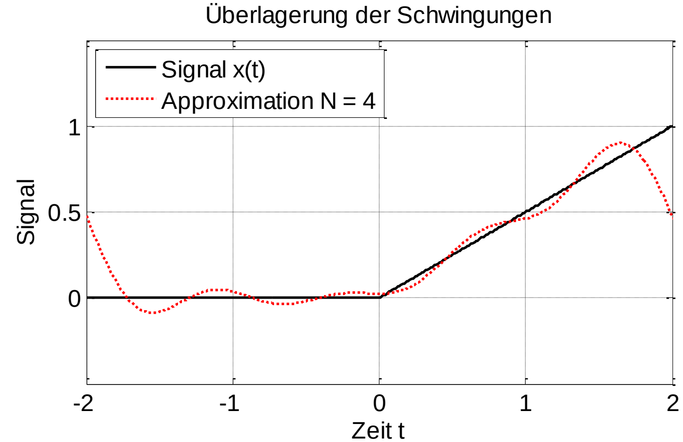
Beispiel: Fourier-Reihe – Definition der komplexen Fourier-Reihe

- Darstellung einzelner Grundschwingungen und ihrer Überlagerung
- Es werden immer zwei Exponentialfunktionen zu einer Kosinus-Funktion zusammengefasst
- Da die Fourier-Koeffizienten A_n und A_{-n} eines reellen Signals immer konjugiert komplex zueinander sind, ergibt sich

$$
\begin{aligned}
x_n(t) &= A_{-n} \cdot e^{-j \cdot n \cdot \omega_0 \cdot t} + A_n \cdot e^{j \cdot n \cdot \omega_0 \cdot t} \\
&= |A_n| \cdot e^{-j \cdot \varphi_n} \cdot e^{-j \cdot n \cdot \omega_0 \cdot t} + |A_n| \cdot e^{j \cdot \varphi_n} \cdot e^{j \cdot n \cdot \omega_0 \cdot t} \\
&= 2 \cdot |A_n| \cdot \cos(n \cdot \omega_0 \cdot t + \varphi_n)
\end{aligned}
$$

- Einzelne harmonischen Schwingungen haben unterschiedliche Amplituden und Phasen, Spektrum des Signals muss deshalb immer zwei Informationen beinhalten: Betrag und Phase.





Spektrum von Signalen

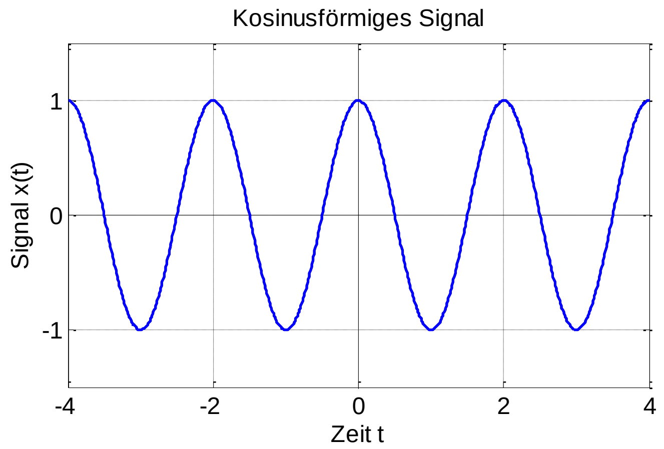
Fourier-Reihe – Definition der komplexen Fourier-Reihe

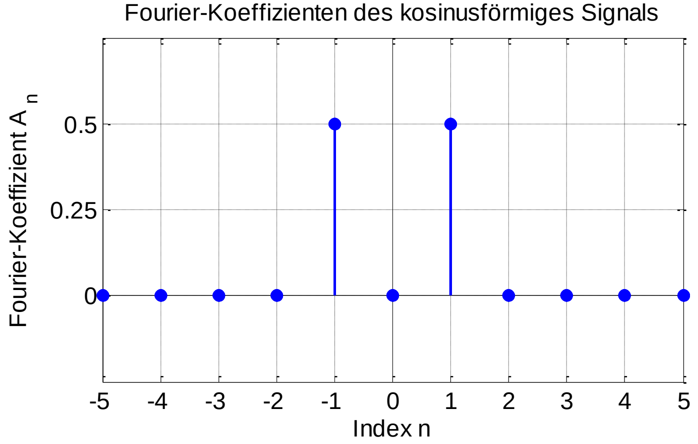
- Mit dem Begriff des Spektrums wird die Anschauung verbunden, welche harmonischen Schwingungen in die Generierung eines Signals eingehen
- Kosinusförmiges Signal darf nur eine Schwingung aufweisen
- Kosinus-Funktion kann über die Eulersche Formel als Summe von zwei konjugiert komplexen Exponentialfunktionen dargestellt werden

$$x(t) = \cos(\omega_0 \cdot t) = \frac{1}{2} \cdot \left(e^{j \cdot \omega_0 \cdot t} + e^{-j \cdot \omega_0 \cdot t}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \cdot e^{j \cdot n \cdot \omega_0 \cdot t}$$

- Damit lauten die Fourier-Koeffizienten

$$A_{-1} = A_1 = \frac{1}{2}$$





Spektrum von Signalen

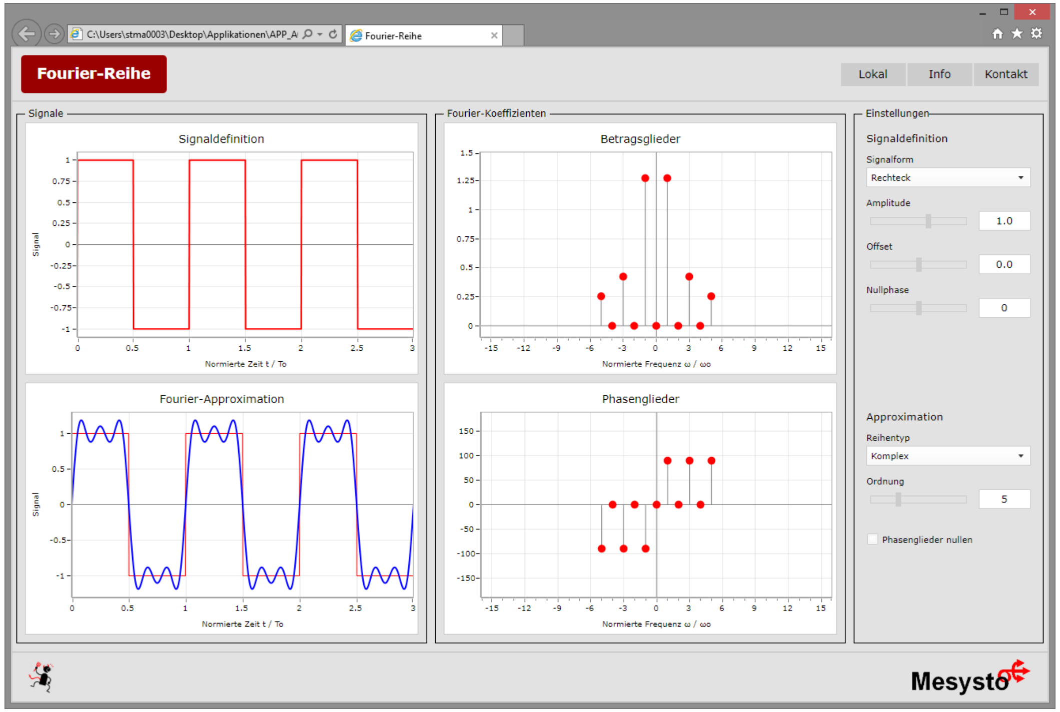
Zusammenfassung: Fourier-Reihe – Definition der komplexen Fourier-Reihe

Definition	Mathematische Beschreibung
Approximationsgleichung	$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \cdot e^{j \cdot n \cdot \omega_0 \cdot t}$
Komplexe Fourier-Koeffizienten	$A_n = \frac{1}{T_0} \cdot \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) \cdot e^{-j \cdot n \cdot \omega_0 \cdot t}\, dt$
Mittelwert c_0	$A_0 = \frac{1}{T_0} \cdot \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)\, dt$
Approximationsgleichung vom Grad N	$x_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} A_n \cdot e^{j \cdot n \cdot \omega_0 \cdot t}$

Spektrum von Signalen

Fourier-Reihe – Definition der komplexen Fourier-Reihe

- Visualisierung der Fourier-Reihe als Applikation
- Link auf Applikation in Systemtheorie Online verfügbar
- Zwei Arten der Darstellung
  - Reelle Fourier-Reihe
  - Komplexe Fourier-Reihe, Darstellung von Betrag und Phase der Fourier-Koeffizienten
- Applikation erlaubt den Vergleich von Fourier-Reihen zweier Signale, um die Rechenregeln der Fourier-Transformation plausibilisieren zu können



Spektrum von Signalen

Übungsaufgabe: Fourier-Reihe – Definition der komplexen Fourier-Reihe

- Die Zeitfunktion x(t) mit der Periode T = 2 ist definiert durch

$$x(t) = \begin{cases} 1 \text{ für } -1 \le t < 0 \\ -1 \text{ für } 0 \le t < 1 \end{cases}$$

- Skizzieren Sie das Schaubild von x(t) in dem Intervall t = - 2 … 2
- Berechnen Sie die komplexe Fourier-Reihe von x(t) bis zur 5. Ordnung
- Skizzieren Sie die Funktion und die Approximation über eine Fourier-Reihe