Hochschule Karlsruhe
Technik und Wirtschaft
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES
Näher dran.

EIT Fakultät für Elektro- und Informationstechnik

Systemtheorie

Vorlesung 18: Grundlagen der Fourier-Transformation

Fakultät für Elektro- und Informationstechnik, Manfred Strohrmann

Spektrum von Signalen

Fourier-Transformation – Einführung

- Fourier-Reihe erlaubt Berechnung des Spektrums eines periodischen Signals
- Viele Signale sind jedoch nicht periodisch, so dass die Fourier-Reihe nicht eingesetzt werden kann
- Einführung der Fourier-Transformation als Erweiterung der Fourier-Reihe

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \cdot e^{j \cdot n \cdot \omega_0 \cdot t}$$

- Periodisches Signal ergibt sich aus der Überlagerung von harmonischen Schwingungen mit den Kreisfrequenzen $n \cdot \omega_0$, minimaler Abstand zweier Kreisfrequenzen beträgt

$$\Delta\omega = \omega_0 = \frac{2 \cdot \pi}{T_0}$$

- Abstand der Kreisfrequenzen hängt von der Periodendauer T_0 ab

Spektrum von Signalen

Fourier-Transformation – Einführung

- Einsetzen der Definitionsgleichung für die Fourier-Koeffizienten führt zu dem Ausdruck

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \cdot e^{j \cdot n \cdot \omega_0 \cdot t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_0} \cdot \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(\tau) \cdot e^{-j \cdot n \cdot \omega_0 \cdot \tau} \, d\tau \cdot e^{j \cdot n \cdot \omega_0 \cdot t}$$

$$= \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(\tau) \cdot e^{-j \cdot n \cdot \omega_0 \cdot \tau} \, d\tau \cdot e^{j \cdot n \cdot \omega_0 \cdot t} \cdot \Delta\omega$$

- Eine nicht periodische Funktion x(t), kann als periodische Funktion mit unendlich langer Periodendauer $T \to \infty$ aufgefasst werden
- Bei dieser Grenzwertbetrachtung wird der Abstand zwei benachbarter Frequenzen infinitesimal klein

$$\lim_{T_0 \to \infty} \Delta\omega = \lim_{T_0 \to \infty} \frac{2 \cdot \pi}{T_0} = d\omega$$

- Einzelne diskrete Kreisfrequenzen $n \cdot \omega_0$ gehen in kontinuierliche Kreisfrequenz ω über

Spektrum von Signalen

Fourier-Transformation – Einführung

- Statt der Summe über die Kreisfrequenzen wird das Integral gebildet, es ergibt sich die Definitionsgleichung der Fourier-Transformation

$$x(t) = \lim_{T_0 \to \infty} \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(\tau) \cdot e^{-j \cdot n \cdot \omega_0 \cdot \tau} \, d\tau \cdot e^{j \cdot n \cdot \omega_0 \cdot t} \cdot \Delta\omega$$

$$= \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot \tau} \, d\tau \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t} \, d\omega = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t} \, d\omega$$

- Fourier-Transformation stellt auch für nicht periodische Signale einen Zusammenhang zwischen einem Signal $x(t)$ im Zeitbereich und seinem Spektrum $X(\omega)$ her
- Bedeutung des Spektrums ist identisch zur Bedeutung bei der Fourier-Reihe

Spektrum von Signalen

Fourier-Transformation – Definitionsgleichung

- Definitionsgleichung der Fourier-Transformation

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t}\ dt$$

und der inversen Fourier-Transformation

$$x(t) = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t}\ d\omega$$

- Für die Korrespondenzen der Fourier-Transformation wird, wie bereits bei der Laplace-Transformation, die Schreibweise

$$\mathfrak{I}\left(x(t)\right) = X(\omega)$$

oder das Hantel-Symbol verwendet

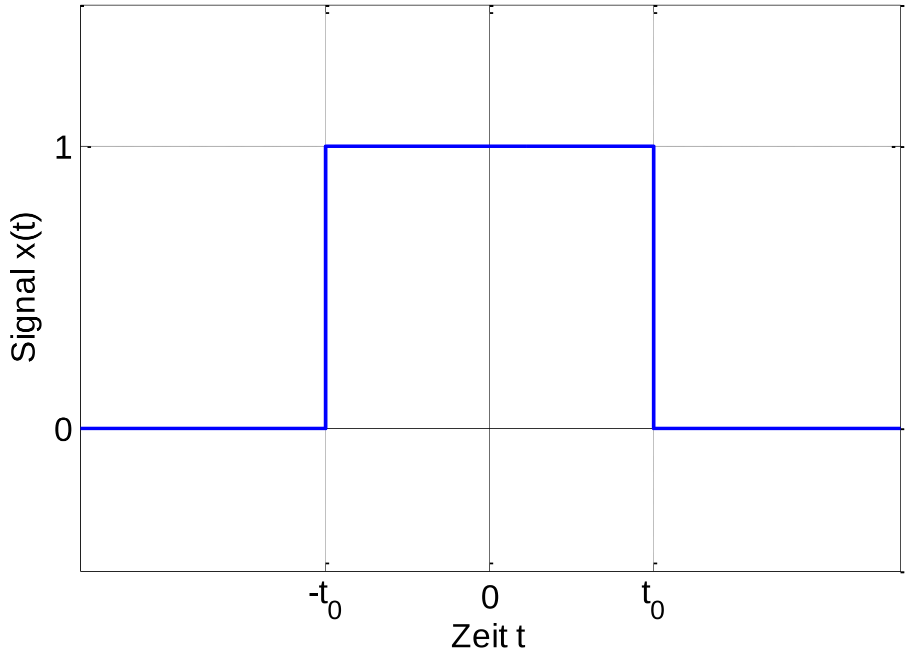
$$x(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ X(\omega)$$

Spektrum von Signalen

Beispiel: Fourier-Transformation – Spektrum der Rechteckfunktion

- Berechnung der Fourier-Transformierten einer Rechteckfunktion

$$x(t) = \begin{cases} 0 \text{ für } t \le -t_0 \\ 1 \text{ für } -t_0 < t \le t_0 \\ 0 \text{ für } t_0 < t \end{cases}$$



- Einsetzen in die Definitionsgleichung der Fourier-Transformation

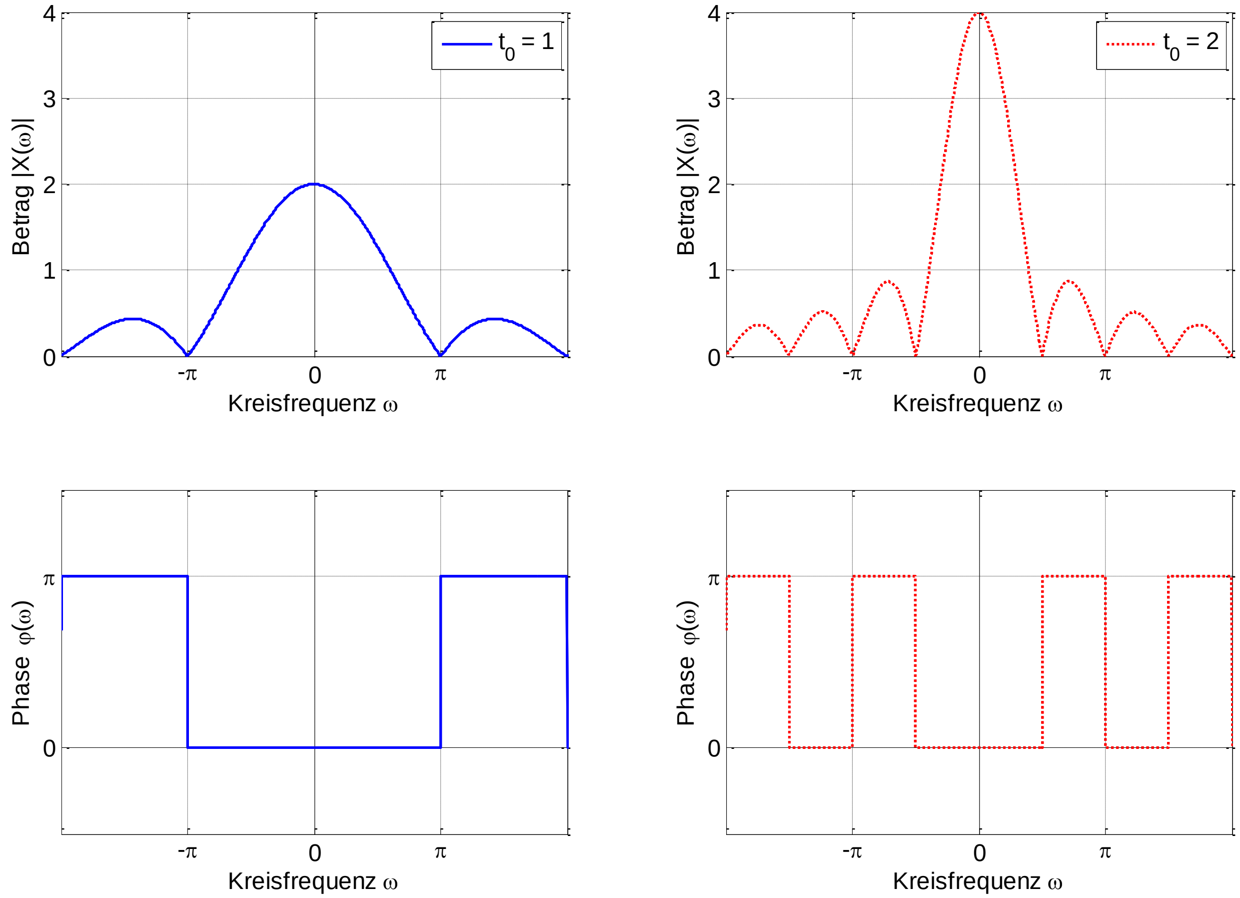
$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j\cdot\omega\cdot t}\, dt = \int_{-t_0}^{t_0} 1 \cdot e^{-j\cdot\omega\cdot t}\, dt$$

$$= \frac{1}{-j\cdot\omega} \cdot \left(e^{-j\cdot\omega\cdot t_0} - e^{j\cdot\omega\cdot t_0} \right) = 2 \cdot t_0 \cdot \frac{\sin(\omega \cdot t_0)}{\omega \cdot t_0}$$

- Darstellung von Betrag und Phase für t_0 = 1 und 2

Spektrum von Signalen

Beispiel: Fourier-Transformation – Spektrum der Rechteckfunktion



Spektrum von Signalen

Beispiel: Fourier-Transformation – Spektrum der Rechteckfunktion

- Spektrum der Rechteckfunktion x(t) erstreckt sich über den vollen Frequenzbereich von $-\infty < \omega < \infty$, an der Rechteckfunktion sind damit harmonische Schwingungen aller Frequenzen beteiligt
- Wesentlicher Bereich des Spektrums, also der Teil mit den größten Amplituden, liegt zwischen den Nulldurchgängen der Spektralfunktion, nämlich im Bereich $-\pi/t_0 < \omega < \pi/t_0$
- An den Nulldurchgängen wechselt das Vorzeichen der Spektralfunktion, damit ändert sich die Phase an diesen Stellen sprunghaft um π
- Wird die Breite $2 \cdot t_0$ der Rechteckfunktion vergrößert, wird die Spektralfunktion schmäler, generell gehört zu einem Signal von kurzer Dauer eine breite Spektralfunktion und umgekehrt
- Verschiebung der Rechteckfunktion um t_0 nach rechts führt zu einer kausalen Rechteckfunktion, sie kann im Zeitbereich dargestellt werden als

$$X(\omega) = \int_0^{2\cdot t_0} 1 \cdot e^{-j\cdot\omega\cdot t}\, dt = \frac{1}{-j\cdot\omega} \cdot e^{-j\cdot\omega\cdot t}\Big|_0^{2\cdot t_0} = \frac{1}{-j\cdot\omega} \cdot \left(e^{-j\cdot\omega\cdot 2\cdot t_0} - 1\right) = 2 \cdot t_0 \cdot \frac{\sin(\omega \cdot t_0)}{\omega \cdot t_0} \cdot e^{-j\cdot\omega\cdot t_0}$$

- Fourier-Transformierten der beiden Rechtecke haben denselben Betrag, durch die Verschiebung im Zeitbereich ändert sich die Phase der Fourier-Transformierten um $\Delta\varphi = -\omega \cdot t_0$

Spektrum von Signalen

Beispiel: Fourier-Transformation – Spektrum der Impulsfunktion

- Impulsfunktion $\delta(t)$ kann als Grenzwert einer Rechteckfunktion verstanden werden

$$\delta(t) = \lim_{t_0 \to 0} \frac{1}{2 \cdot t_0} \cdot \left(\sigma(t + t_0) - \sigma(t - t_0) \right)$$

- Spektrum der Impulsfunktion ergibt sich durch Einsetzen der Gleichung in die Definitionsgleichung der Fourier-Transformation

$$X(\omega) = \int_{-t_0}^{t_0} \lim_{t_0 \to 0} \frac{1}{2 \cdot t_0} \cdot 1 \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t} \; dt = \lim_{t_0 \to 0} \frac{1}{2 \cdot t_0} \cdot \int_{-t_0}^{t_0} 1 \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t} \; dt = \lim_{t_0 \to 0} \frac{1}{2 \cdot t_0} \cdot 2 \cdot t_0 \cdot \frac{\sin(\omega \cdot t_0)}{\omega \cdot t_0} = \lim_{t_0 \to 0} \frac{\sin(\omega \cdot t_0)}{\omega \cdot t_0} = 1$$

- Spektrum der idealen Impulsfunktion ist bei allen Frequenzen gleich $X(\omega) = 1$
- Um einen Impuls zu erzeugen, werden harmonische Schwingungen mit beliebig hohen Frequenzen benötigt
- Technische Systeme sind immer bandbegrenzt, ideale Impulse lassen sich technisch nicht realisieren

Spektrum von Signalen

Beispiel: Fourier-Transformation – Spektrum der kausalen Exponentialfunktion

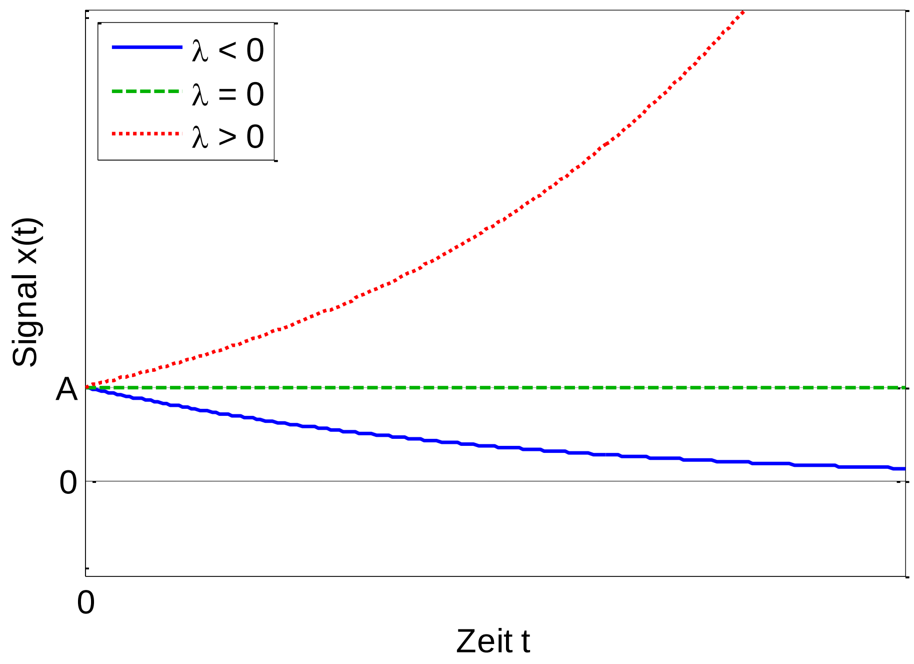
- Kausale Exponentialfunktion ist für $t < 0$ null, zum Zeitpunkt $t = 0$ springt sie auf den Wert eins, je nach Koeffizient λ steigt die Exponentialfunktion an, bleibt konstant oder fällt ab

$$x(t) = e^{\lambda \cdot t} \cdot \sigma(t)$$

- Einsetzen der kausalen Exponentialfunktion in die Definitionsgleichung für die Fourier-Transformation

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda \cdot t} \cdot \sigma(t) \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t} \, dt = \int_{0}^{\infty} e^{(\lambda - j \cdot \omega) \cdot t} \, dt$$

- Es handelt sich um ein uneigentliches Integral



Spektrum von Signalen

Beispiel: Fourier-Transformation – Spektrum der kausalen Exponentialfunktion

- Berechnung des Integrals

$$X(\omega) = \frac{1}{\lambda - j\cdot\omega}\cdot e^{(\lambda - j\cdot\omega)\cdot t}\Big|_0^\infty = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{\lambda - j\cdot\omega}\cdot e^{(\lambda - j\cdot\omega)\cdot t} - \frac{1}{\lambda - j\cdot\omega}\cdot e^{(\lambda - j\cdot\omega)\cdot 0}$$

$$= \frac{1}{j\cdot\omega - \lambda}\cdot\left(1 - \lim_{t\to\infty} e^{-(\lambda - j\cdot\omega)\cdot t}\right)$$

- Grenzwert existiert nur, wenn Re(λ - j$\cdot\omega$) = λ < 0 ist

$$X(\omega) = \frac{1}{j\cdot\omega - \lambda}\cdot\left(1 - \lim_{t\to\infty} e^{(\lambda - j\cdot\omega)\cdot t}\right) = \frac{1}{j\cdot\omega - \lambda}$$

- Für die kausale Exponentialfunktion kann das Spektrum demnach nur für $\lambda < 0$ berechnet werden, für die Koeffizienten $\lambda \geq 0$ konvergiert das Fourier-Integral nicht
- Existenz der Fourier-Transformierten hängt von der Konvergenz des Fourier-Integrals ab

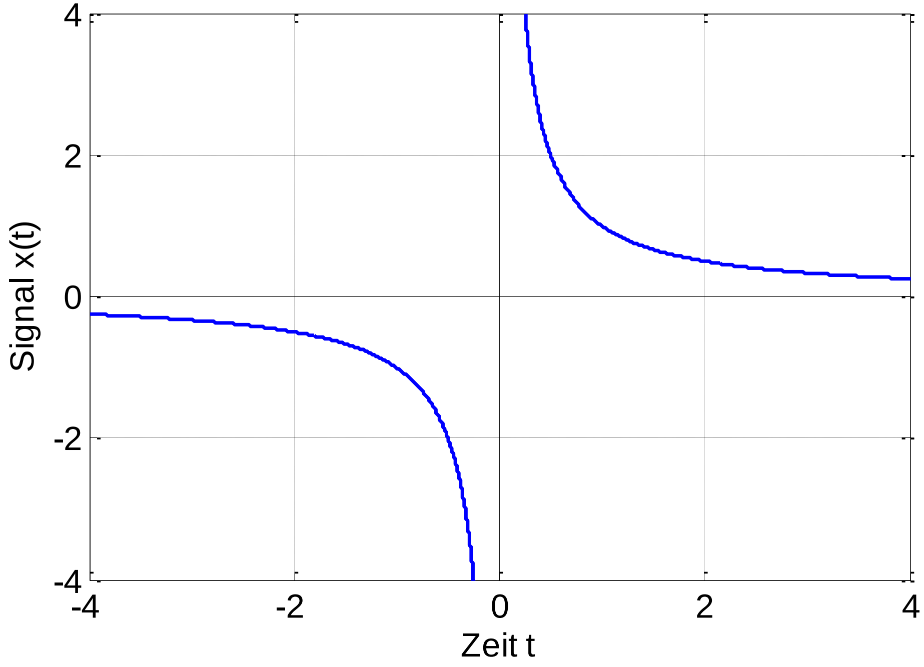
Spektrum von Signalen

Beispiel: Fourier-Transformation – Spektrum der Hyperbel-Funktion

- Spektrum der bisher diskutierten Signale wird direkt über die Auswertung des Fourier-Integrals gelöst, Verfahren führt nicht bei allen Signalen zum Erfolg
- Hyperbel-Funktion als Beispiel für Signal mit Singularität

  $$x(t) = \frac{1}{t}$$

  Integration über die Polstelle t = 0 nicht einfach ausgeführt werden, da die Funktion an dieser Stelle einen unendlichen großen Betrag besitzt und ihr Vorzeichen wechselt
- Berechnung der Fourier-Transformierten über Cauchyschen Hauptwert



Spektrum von Signalen

Beispiel: Fourier-Transformation – Spektrum der Hyperbel-Funktion

- Integral kann in zwei Teilintegrale aufgeteilt werden kann, deren Integrationsgrenzen sich ergeben aus $T \to \infty$ und $\varepsilon \to 0$

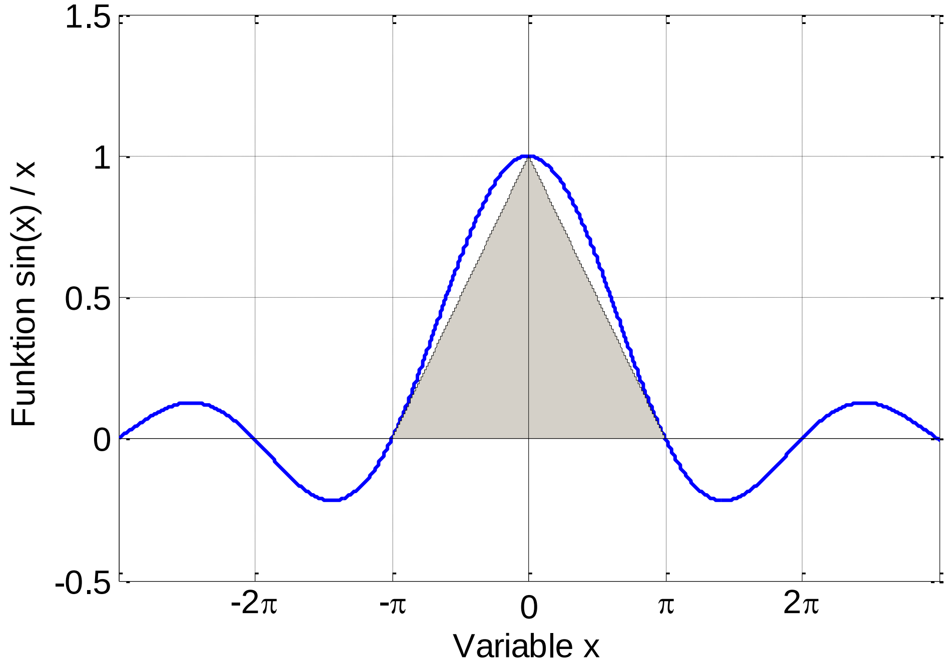
$$X(\omega) = \lim_{\substack{T\to\infty \\ \varepsilon\to 0}} \int_{-T}^{-\varepsilon} \frac{1}{t} \cdot e^{-j\cdot\omega\cdot t}\; dt + \lim_{\substack{T\to\infty \\ \varepsilon\to 0}} \int_{\varepsilon}^{T} \frac{1}{t} \cdot e^{-j\cdot\omega\cdot t}\; dt$$

$$= \lim_{\substack{T\to\infty \\ \varepsilon\to 0}} \int_{\varepsilon}^{T} \frac{1}{t} \cdot \left(e^{-j\cdot\omega\cdot t} - e^{j\cdot\omega\cdot t}\right) dt$$

$$= \lim_{\substack{T\to\infty \\ \varepsilon\to 0}} -2 \cdot j \cdot \int_{\varepsilon}^{T} \frac{\sin(\omega\cdot t)}{t}\; dt$$

- Integral einer sin(x)/x Funktion entspricht der Fläche eines innenliegenden Dreiecks

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x}\; dx = \pi$$



Spektrum von Signalen

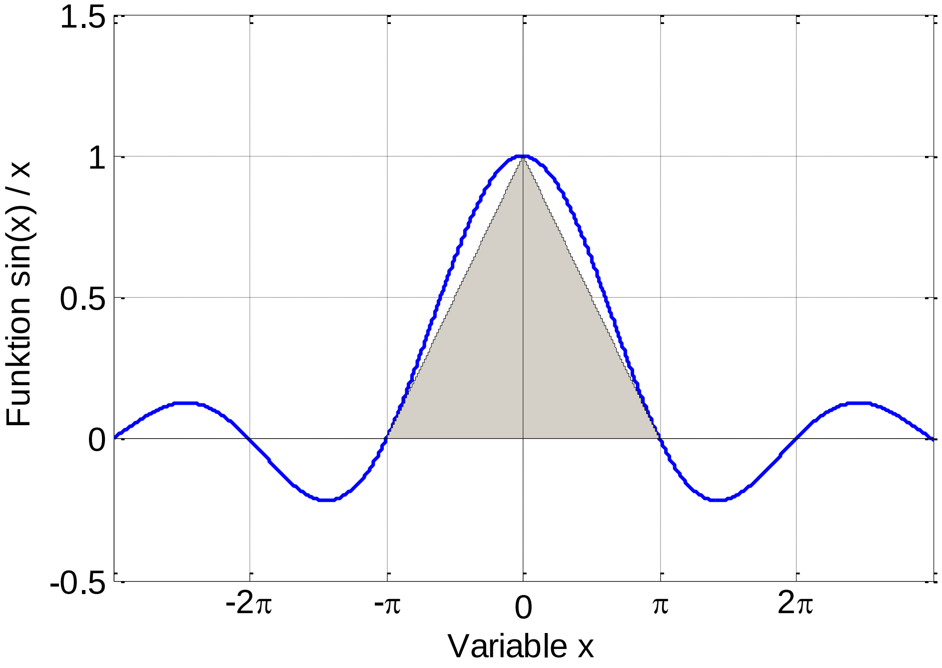
Beispiel: Fourier-Transformation – Spektrum der Hyperbel-Funktion

- Mit den gegebenen Integrationsgrenzen ergibt sich der Ausdruck mit der Substitution $x = \omega \cdot t$

$$X(\omega) = \lim_{\substack{T \to \infty \\ \varepsilon \to 0}} -2 \cdot j \cdot \int_{\varepsilon}^{T} \frac{\sin(\omega \cdot t)}{\omega \cdot t} \, \omega \cdot dt$$

$$= \lim_{\substack{T \to \infty \\ \varepsilon \to 0}} -2 \cdot j \cdot \int_{\omega \cdot \varepsilon}^{\omega \cdot T} \frac{\sin(x)}{x} \, dx$$

- Je nach Vorzeichen von ω muss die Integrationsreihenfolge geändert werden, was zu einem Vorzeichenwechsel beim Integralausdruck führt.



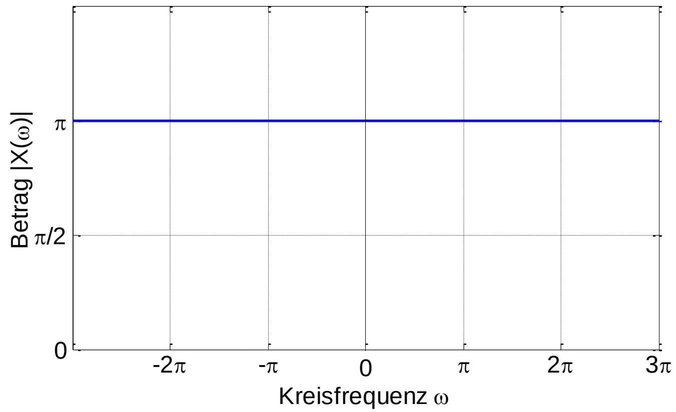
Spektrum von Signalen

Beispiel: Fourier-Transformation – Spektrum der Hyperbel-Funktion

- Unter Berücksichtigung dieses Vorzeichenwechsels von ω ergibt sich der Ausdruck

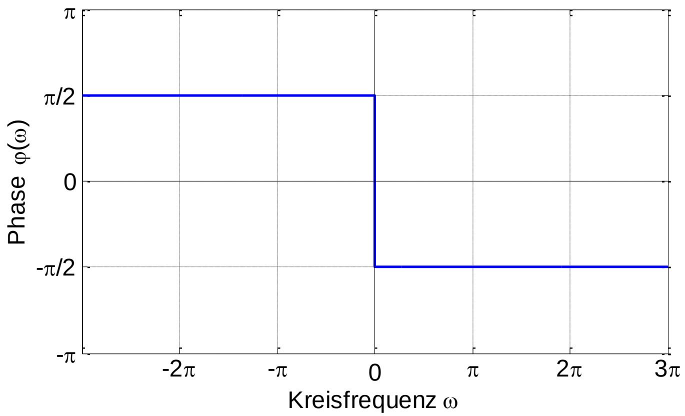
$$X(\omega) = \lim_{\substack{T\to\infty \\ \varepsilon\to 0}} -2\cdot j\cdot \int_{\omega\cdot\varepsilon}^{\omega\cdot T} \frac{\sin(x)}{x}\,dx = -2\cdot j\cdot \frac{\pi}{2}\cdot \mathrm{sgn}(\omega)$$

$$= -j\cdot\pi\cdot \mathrm{sgn}(\omega)$$



- Darstellung des Spektrums $X(\omega)$ der Hyperbel-Funktion als Betrag und Phase

- Betrag des Spektrums ist äquivalent zum Betrag des Spektrums des Impulses, die Fourier-Transformierten von Impuls- und Hyperbelfunktion unterscheiden sich demnach nur in der Phase



Spektrum von Signalen

Übungsaufgabe: Fourier-Transformation – Spektrum der Dreieck-Funktion

- Dreieckfunktion x(t) ist definiert als

$$x(t) = \begin{cases} 0 \text{ für } t \le -t_0 \\ 1 + t / t_0 \text{ für } -t_0 < t \le 0 \\ 1 - t / t_0 \text{ für } 0 < t \le t_0 \\ 0 \text{ für } t_0 < t \end{cases}$$

- Berechnen Sie das Spektrum der Dreieck-Funktion über die Definitionsgleichung der Fourier-Transformation.