Hochschule Karlsruhe
Technik und Wirtschaft
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES
Näher dran.

EIT Fakultät für Elektro- und Informationstechnik

Systemtheorie

Vorlesung 19: Eigenschaften der Fourier-Transformation

Fakultät für Elektro- und Informationstechnik, Manfred Strohrmann

Spektrum von Signalen

Fourier-Transformation – Eigenschaften der Fourier-Transformation

- Definitionsgleichungen der Fourier-Transformation

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t} \, dt$$

$$x(t) = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t} \, d\omega$$

  erlauben die Berechnung von Korrespondenzen der Fourier-Transformation

- Rechenregeln und Eigenschaften der Fourier-Transformation ermöglichen die Herleitung weiterer Korrespondenzen und Zusammenhänge im Frequenzbereich

Spektrum von Signalen

Fourier-Transformation – Existenz der Fourier-Transformation

- Fourier-Transformierte $X(\omega)$ eines Signals $x(t)$ errechnet sich aus der Definitionsgleichung

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t} \, dt$$

- Integral konvergiert nicht für beliebige Funktionen $x(t)$, Beispiel kausale Exponentialfunktion
- Bedingungen für die Existenz der Fourier-Transformation, zur Herleitung dieser Beziehung wird der Betrag der Fourier-Transformierten abgeschätzt

$$\left|X(\omega)\right| \le \int_{-\infty}^{\infty} \left|x(t) \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t}\right| \, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left|x(t)\right| \cdot \left|e^{-j \cdot \omega \cdot t}\right| \, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left|x(t)\right| \, dt < \infty$$

- Abschätzung zeigt, dass die Fourier-Transformierte existiert, wenn das Signal $x(t)$ absolut integrierbar ist
- Bedingung ist hinreichend, aber nicht notwendig, es existieren Zeitfunktionen, für die die Bedingung nicht erfüllt wird, deren Fourier-Transformierte aber trotzdem berechnet werden können

Spektrum von Signalen

Fourier-Transformation – Existenz der Fourier-Transformation

- Zeitlich begrenzte Signale mit endlicher Amplitude
  Zeitlich begrenzte Signale mit endlicher Amplitude erfüllen die Bedingung der absoluten Konvergenz, der Betrag des Signals nach oben mit x_{max} abgeschätzt werden, die Fourier-Transformierte existiert unter diesen Bedingungen immer

$$\left|X(\omega)\right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} \left|x(t) \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t}\right| \, dt \leq \int_{t_1}^{t_2} \left|x(t)\right| \, dt \leq \int_{t_1}^{t_2} x_{max} \, dt = x_{max} \cdot (t_2 - t_1) < \infty$$

- Kausale Signale
  Konvergenzbedingung kann mit Hilfe der Exponentialfunktion abgeleitet werden, Funktion x(t) wird mit Hilfe einer Exponentialfunktion nach oben abgeschätzt

$$\left|X(\omega)\right| \leq \int_{0}^{\infty} \left|x(t) \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t}\right| \, dt \leq \int_{0}^{\infty} M \cdot e^{\delta \cdot t} \, dt$$

Damit existiert die Fourier-Transformierte, wenn für den Parameter δ gilt: $\delta < 0$

Spektrum von Signalen

Fourier-Transformation – Fourier-Transformation für Leistungssignale

- Signale können in Energie- und Leistungssignale eingeteilt werden
- Energiesignale

$$0 < \int_{-\infty}^{\infty} \left|x(t)\right|^2 \, dt < \infty$$

- Leistungssignale

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \cdot \int_{-T/2}^{T/2} \left|x(t)\right|^2 \, dt < \infty$$

- Leistungssignale erfüllen die Bedingung nach absoluter Integrierbarkeit nicht, trotzdem lassen sich die Spektren von Leistungssignalen berechnen
- Voraussetzung ist die Einführung der Impulsfunktion im Spektralbereich
- Darstellung der Rechnung an einigen Beispielen

Spektrum von Signalen

Beispiel: Fourier-Transformation – Fourier-Transformation für ein konstantes Signal

- Konstantes Signal x(t) = 1 ist nicht absolut integrierbar
- Berechnung der Fourier-Transformierten dieses Signals über Impulsfunktion im Frequenzbereich

$$X(\omega)=\delta(\omega)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\cdot\left(\sigma(\omega+\varepsilon)-\sigma(\omega-\varepsilon)\right)$$

- Inverse Fourier-Transformation

$$x(t)=\frac{1}{2\cdot\pi}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\omega)\cdot e^{j\cdot\omega\cdot t}\,d\omega=\frac{1}{2\cdot\pi}\cdot\left(\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\cdot\int_{-\varepsilon/2}^{\varepsilon/2}e^{j\cdot\omega\cdot t}\,d\omega\right)=\frac{1}{2\cdot\pi}\cdot\left(\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\cdot\frac{1}{j\cdot t}\cdot\left(e^{j\cdot\frac{\varepsilon}{2}\cdot t}-e^{-j\cdot\frac{\varepsilon}{2}\cdot t}\right)\right)$$

$$=\frac{1}{2\cdot\pi}\cdot\left(\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\cdot\frac{2\cdot j\cdot\sin\left(\frac{\varepsilon}{2}\cdot t\right)}{j\cdot t}\right)=\frac{1}{2\cdot\pi}\cdot\left(\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\sin\left(\frac{\varepsilon}{2}\cdot t\right)}{\frac{\varepsilon}{2}\cdot t}\right)=\frac{1}{2\cdot\pi}$$

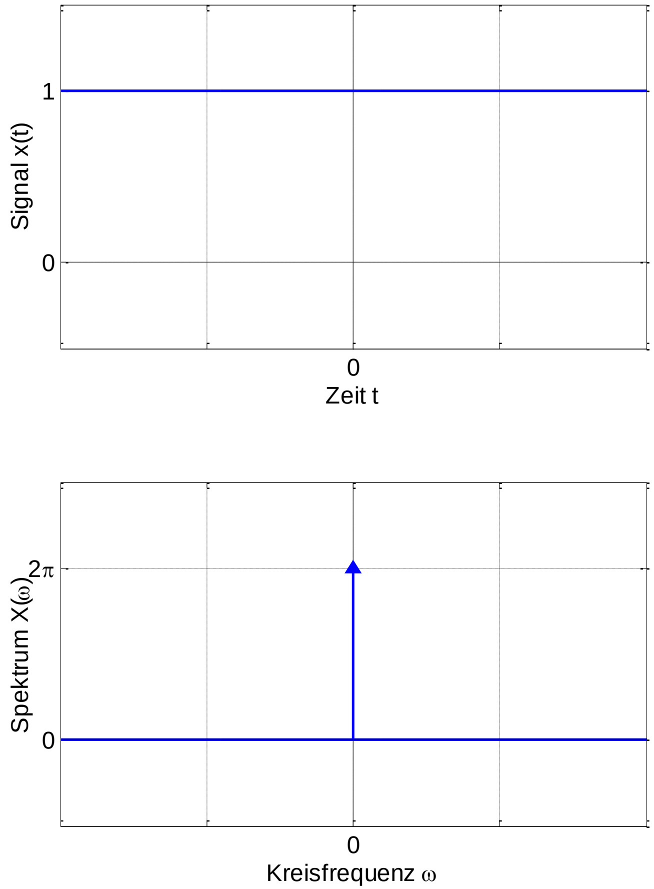
Spektrum von Signalen

Beispiel: Fourier-Transformation – Fourier-Transformation für ein konstantes Signal

- Zeitfunktion x(t) = 1 besitzt das Spektrum

$$X(\omega) = 2 \cdot \pi \cdot \delta(\omega)$$

- Zeitfunktion ist nicht absolut integrierbar, trotzdem kann ihr ein Spektrum $X(\omega)$ zugewiesen werden
- Anschaulich bedeutet diese Korrespondenz, dass das konstante Signal keine Spektralanteile mit $\omega \neq 0$ besitzt
- Berechnung des Zeitsignals hätte auch direkt mit der Ausblendeigenschaft der Impulsfunktion erfolgen können



Spektrum von Signalen

Beispiel: Fourier-Transformation – Fourier-Transformation harmonischer Signale

- Ausgangspunkt für die Berechnung der Korrespondenz ist die Vermutung, dass sich das Spektrum der Kosinus-Funktion gemäß der Eulerschen-Formel

  $$x(t) = \cos(\omega_0 \cdot t) = \frac{1}{2} \cdot \left(e^{j \cdot \omega_0 \cdot t} + e^{-j \cdot \omega_0 \cdot t} \right)$$

  aus zwei Impulsen an den Stellen - ω_0 und ω_0 zusammensetzt

- Berechnung der Zeitfunktion zu dem Spektrum

  $$X(\omega) = \delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)$$

- Inverse Fourier-Transformation

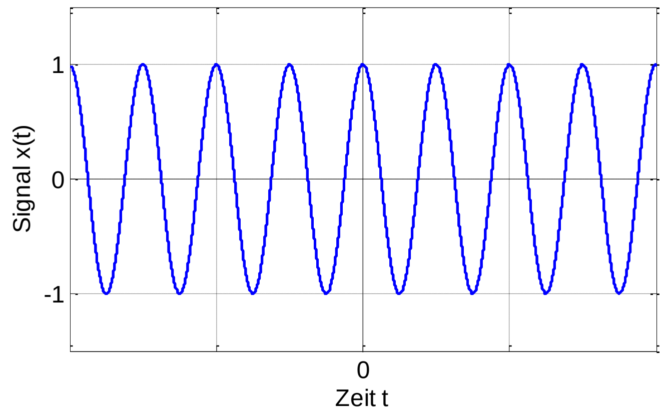
  $$x(t) = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t} \, d\omega = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \left(\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0) \right) \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t} \, d\omega$$

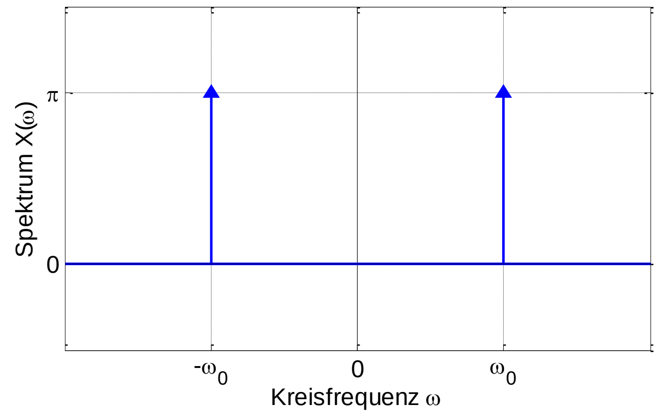
Spektrum von Signalen

Beispiel: Fourier-Transformation – Fourier-Transformation harmonischer Signale

- Anwendung der Ausblendeigenschaft der Impulsfunktion nach Aufteilung des Integrals

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \frac{1}{2\cdot\pi}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\omega+\omega_0)\cdot e^{j\cdot\omega\cdot t}\,d\omega \\
&\quad +\frac{1}{2\cdot\pi}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\omega-\omega_0)\cdot e^{j\cdot\omega\cdot t}\,d\omega \\
&= \frac{1}{2\cdot\pi}\cdot e^{-j\cdot\omega_0\cdot t}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\omega+\omega_0)\,d\omega \\
&\quad +\frac{1}{2\cdot\pi}\cdot e^{j\cdot\omega_0\cdot t}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\omega-\omega_0)\,d\omega \\
&= \frac{1}{2\cdot\pi}\cdot\left(e^{-j\cdot\omega_0\cdot t}+e^{j\cdot\omega_0\cdot t}\right)=\frac{1}{\pi}\cdot\cos(\omega_0\cdot t)
\end{aligned}
$$





Spektrum von Signalen

Fourier-Transformation – Dualität zwischen Zeit- und Frequenzbereich

- Definitionsgleichungen der Fourier-Transformation

  $$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t} \, dt$$

  $$x(t) = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t} \, d\omega$$

  weisen eine formelle Ähnlichkeit auf

- In beiden Fällen wird ein uneigentliches Integral über das Produkt einer Funktion und einer Exponentialfunktion mit imaginärem Argument gebildet

- Wegen Ähnlichkeit zwischen Zeit- und Frequenzbereich kann aus einer bekannten Korrespondenz

  $$x(t) \circ\!-\!\bullet \; X(\omega)$$

  die sogenannte duale Korrespondenz berechnet werden

  $$y(t) = X(t) \circ\!-\!\bullet \; 2 \cdot \pi \cdot x(-\omega) = Y(\omega)$$

Spektrum von Signalen

Fourier-Transformation – Dualität zwischen Zeit- und Frequenzbereich

- Zum Beweis wird in die Gleichung für die inverse Fourier-Transformation der Ausdruck für das neue Spektrum eingesetzt

$$y(t) = \frac{1}{2\cdot\pi}\cdot\int_{-\infty}^{\infty} Y(\omega)\cdot e^{j\cdot\omega\cdot t}\ d\omega = \frac{1}{2\cdot\pi}\cdot\int_{-\infty}^{\infty} 2\cdot\pi\cdot x(-\omega)\cdot e^{j\cdot\omega\cdot t}\ d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} x(-\omega)\cdot e^{j\cdot\omega\cdot t}\ d\omega$$

- Substitution $\omega = -\upsilon$ führt zu dem Ausdruck

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(-\omega)\cdot e^{j\cdot\omega\cdot t}\ d\omega = -\int_{\infty}^{-\infty} x(\upsilon)\cdot e^{-j\cdot\upsilon\cdot t}\ d\upsilon = \int_{-\infty}^{\infty} x(\upsilon)\cdot e^{-j\cdot\upsilon\cdot t}\ d\upsilon = X(t)$$

- Vergleich mit der Definitionsgleichung der inversen Fourier-Transformation

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\cdot e^{-j\cdot\omega\cdot t}\ dt$$

bestätigt die Dualität zwischen Zeit- und Frequenzbereich

- Jede Korrespondenz besitzt eine duale Korrespondenz

Spektrum von Signalen

Beispiel: Fourier-Transformation – Dualität zwischen Zeit- und Frequenzbereich

- Spektrum der Rechteckfunktion

$$x(t) = \sigma(t+3) - \sigma(t-3)$$

wurde berechnet zu

$$X(\omega) = 2 \cdot 3 \cdot \frac{\sin(\omega \cdot 3)}{\omega \cdot 3}$$

- Korrespondenz von dem Spektrum

$$Y(\omega) = 2 \cdot \pi \cdot x(-\omega) = 2 \cdot \pi \cdot \left(\sigma(-\omega+3) - \sigma(-\omega-3)\right) = 2 \cdot \pi \cdot \left(\sigma(\omega+3) - \sigma(\omega-3)\right)$$

ergibt sich wegen der Dualität zwischen Zeit- und Frequenzbereich zu

$$y(t) = X(t) = 2 \cdot 3 \cdot \frac{\sin(t \cdot 3)}{t \cdot 3}$$

Spektrum von Signalen

Fourier-Transformation – Fourier-Transformation reeller Signale

- Spektrum eines Signals x(t) errechnet sich nach der Definitionsgleichung der Fourier-Transformation zu

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j\cdot\omega\cdot t}\ dt$$

und

$$X(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{j\cdot\omega\cdot t}\ dt$$

- Bei reellen Signalen ergibt sich das konjugiert komplexe Spektrum zu

$$X^*(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j\cdot\omega\cdot t}\ dt = X(\omega)$$

Konjugiert komplexes Spektrum	$X^*(-\omega) = X(\omega)$
Gerader Realteil	$\mathrm{Re}\big(X(\omega)\big) = \mathrm{Re}\big(X(-\omega)\big)$
Ungerader Imaginärteil	$\mathrm{Im}\big(X(\omega)\big) = -\mathrm{Im}\big(X(-\omega)\big)$
Gerader Betrag	$\lvert X(\omega)\rvert = \lvert X(-\omega)\rvert$
Ungerade Phase	$\varphi(\omega) = -\varphi(-\omega)$

Spektrum von Signalen

Fourier-Transformation – Fourier-Transformation komplexer Signale

- Komplexe Signale haben kompliziertere Symmetriebedingungen, Zerlegung des Signals in gerade und ungerade Signalanteile erforderlich
- Symmetriebedingungen erlauben die Berechnung des Spektrums eines konjugiert komplexen Signals

$$x^*(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ X^*(-\omega)$$

- Eigenschaft wird bei der Berechnung der Leistung von Signalen genutzt

$$x(t) = \mathrm{Re}\left(x_g(t)\right) + \mathrm{Re}\left(x_u(t)\right) + j \cdot \mathrm{Im}\left(x_g(t)\right) + j \cdot \mathrm{Im}\left(x_u(t)\right)$$

$$X(\omega) = \mathrm{Re}\left(X_g(\omega)\right) + \mathrm{Re}\left(X_u(\omega)\right) + j \cdot \mathrm{Im}\left(X_g(\omega)\right) + j \cdot \mathrm{Im}\left(X_u(\omega)\right)$$

Spektrum von Signalen

Beispiel: Fourier-Transformation – Fourier-Transformation der Sprungfunktion

- Sprungfunktion ist nicht absolut integrierbar, so dass die Berechnung über die Definitionsgleichung der Fourier-Transformation ausscheidet
- Berechnung des Spektrums nach Aufteilung in zwei Summenden mit bekannten Korrespondenzen

$$x(t) = \sigma(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \operatorname{sgn}(t)$$

- Einsetzen der Funktion in die Definitionsgleichung der Fourier-Transformation

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \operatorname{sgn}(t) \right) \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t} \, dt = \frac{1}{2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t} \, dt + \frac{1}{2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn}(t) \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t} \, dt = X_1(\omega) + X_2(\omega)$$

- Spektrum der konstanten Zahl 1/2 ergibt sich zu

$$X_1(\omega) = \pi \cdot \delta(\omega)$$

Spektrum von Signalen

Beispiel: Fourier-Transformation – Fourier-Transformation der Sprungfunktion

- Spektrum der Signum-Funktion errechnet sich mit der Dualität von Zeit- und Frequenzbereich

$$X(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\; 2\cdot\pi\cdot x(-\omega)$$

und der Korrespondenz der Hyperbelfunktion

$$j\cdot\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{t} \circ\!\!-\!\!\bullet\; \operatorname{sgn}(\omega)$$

zu

$$X_2(\omega)=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\pi\cdot j\cdot\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{-\omega}=\frac{1}{j\cdot\omega}$$

- Spektrum der Sprungfunktion zu

$$X(\omega)=X_1(\omega)+X_2(\omega)=\pi\cdot\delta(\omega)+\frac{1}{j\cdot\omega}$$