Hochschule Karlsruhe
Technik und Wirtschaft
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES
Näher dran.

EIT Fakultät für Elektro- und Informationstechnik

Systemtheorie

Vorlesung 20: Rechenregeln der Fourier-Transformation

Fakultät für Elektro- und Informationstechnik, Manfred Strohrmann

Spektrum von Signalen

Fourier-Transformation – Rechenregeln

- Spektren von Signalen können über die Definitionsgleichung von Fourier-Transformation und inverser Fourier-Transformation berechnet werden
- Vorgehen ist jedoch zeitaufwändig
- Einführung von Rechenregeln, die in Kombination mit bekannten Korrespondenzen eine vereinfachte Bestimmung der Spektren von Signalen erlauben
- Beweis der Rechenregeln ähnlich wie bei der Laplace-Transformation, deshalb werden sie zunächst tabellarisch zusammengefasst, anschließend werden einzelne Regeln ausführlich vorgestellt
- Viele Rechenregeln sind wegen der Dualität von Fourier- und inverser Fourier-Transformation dual zueinander

Spektrum von Signalen

Zusammenfassung: Fourier-Transformation – Rechenregeln

Regel	Funktion x(t)	Fourier-Transformierte X(ω)
Linearität	$\nu_1 \cdot x_1(t) + \nu_2 \cdot x_2(t)$	$\nu_1 \cdot X_1(\omega) + \nu_2 \cdot X_2(\omega)$
Zeitverschiebung	$x(t - t_0)$	$e^{-j\cdot\omega\cdot t_0} \cdot X(\omega)$
Modulation	$x(t) \cdot e^{j\cdot\omega_0\cdot t}$	$X(\omega - \omega_0)$
Zeitumkehr	$x(-t)$	$X(-\omega)$
Skalierung (a > 0)	$x(a \cdot t)$	$\frac{1}{a} \cdot X\left(\frac{\omega}{a}\right)$

Spektrum von Signalen

Zusammenfassung: Fourier-Transformation – Rechenregeln

Regel	Funktion x(t)	Fourier-Transformierte X(ω)
Integration	$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau$	$\frac{X(\omega)}{j\cdot\omega} + \pi\cdot X(0)\cdot\delta(\omega)$
n-fache Ableitung	$\frac{d^n x}{dt^n}$	$(j\cdot\omega)^n\cdot X(\omega)$
Multiplikation	$x(t)\cdot w(t)$	$\frac{1}{2\cdot\pi}\cdot X(\omega) * W(\omega)$
Faltung	$g(t) * x(t)$	$G(\omega)\cdot X(\omega)$
Parsevalsches Theorem	$\int_{-\infty}^{\infty} \lvert x(t)\rvert^2\, dt$	$\frac{1}{2\cdot\pi}\cdot\int_{-\infty}^{\infty} \lvert X(\upsilon)\rvert^2\, d\upsilon$

Spektrum von Signalen

Fourier-Transformation – Multiplikationsregel

- Multiplikationsregel kann zur mathematischen Beschreibung von Zeitbegrenzungen mit Fensterfunktionen w(t) (Window) genutzt werden

$$x_W(t) = x(t) \cdot w(t)$$

- Durch die endliche Beobachtungsdauer wird das ursprüngliche Spektrum $X(\omega)$ der Zeitfunktion mit dem Spektrum der Rechteckfunktion gefaltet

$$W(\omega) = 2 \cdot t_0 \cdot \frac{\sin(\omega \cdot t_0)}{\omega \cdot t_0}$$

- Besonders anschaulich wird dieser Prozess bei der Beobachtung einer Kosinus-Funktion

$$x(t) = \cos(\omega_0 \cdot t)$$

mit dem Spektrum

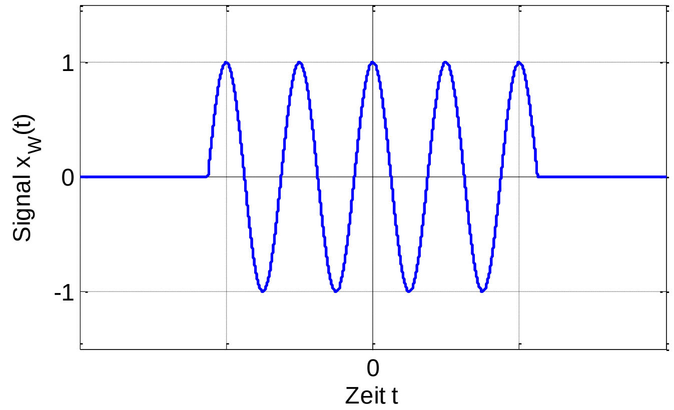
$$X(\omega) = \pi \cdot \left(\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)\right)$$

Spektrum von Signalen

Fourier-Transformation – Multiplikationsregel

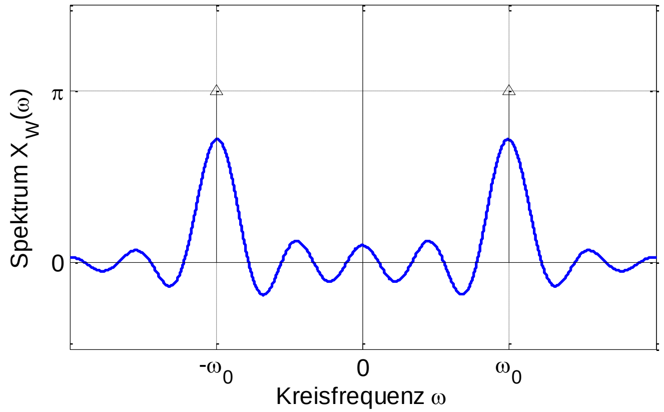
- Faltung des Spektrums W(ω) der Fensterfunktion mit den beiden Impulsen des Spektrums X(ω) führt zu einer Verschiebung des Spektrums an die Stelle der Impulse

$$X_W(\omega) = \frac{1}{2\cdot\pi}\cdot\pi\cdot\left(W(\omega+\omega_0)+W(\omega-\omega_0)\right)$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\left(W(\omega+\omega_0)+W(\omega-\omega_0)\right)$$



- Durch die Faltung werden die Impulse des ursprünglichen Spektrums verbreitert

- Sachverhalt wird bei der digitalen Signalverarbeitung für die Erklärung des sogenannten Leakage-Effektes genutzt



Spektrum von Signalen

Fourier-Transformation – Parsevalsches Theorem

- Energie eines Signals kann im Zeitbereich nicht immer effizient berechnet werden, mit Hilfe des Parsevalschen Theorems kann die Berechnung der Energie im Frequenzbereich erfolgen

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \left|x(t)\right|^2 \, dt = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \left|X(\omega)\right|^2 \, d\omega$$

- Anwendung am Beispiel der Impulsantwort eines RC-Gliedes

$$g(t) = \frac{1}{R \cdot C} \cdot e^{-\frac{1}{R \cdot C} \cdot t} \cdot \sigma(t)$$

- Berechnung der Energie im Zeitbereich

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \left|g(t)\right|^2 \, dt = \int_{0}^{\infty} \left(\frac{1}{R \cdot C} \cdot e^{-\frac{1}{R \cdot C} \cdot t} \right)^2 \, dt = \frac{1}{R^2 \cdot C^2} \cdot \int_{0}^{\infty} e^{-\frac{2}{R \cdot C} \cdot t} \, dt = -\frac{1}{R^2 \cdot C^2} \cdot \frac{R \cdot C}{2} \cdot e^{-\frac{2}{R \cdot C} \cdot t} \Bigg|_{0}^{\infty} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{R \cdot C}$$

Spektrum von Signalen

Fourier-Transformation – Parsevalsches Theorem

- Impulsantwort hat das Spektrum

$$G(\omega) = \frac{1}{1 + j \cdot \omega \cdot R \cdot C}$$

- Nach dem Satz von Parseval kann die Energie auch im Frequenzbereich berechnet werden

$$E = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) \cdot G^*(\omega)\, d\omega = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + j \cdot \omega \cdot R \cdot C} \cdot \frac{1}{1 - j \cdot \omega \cdot R \cdot C}\, d\omega = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + \omega^2 \cdot R^2 \cdot C^2}\, d\omega$$

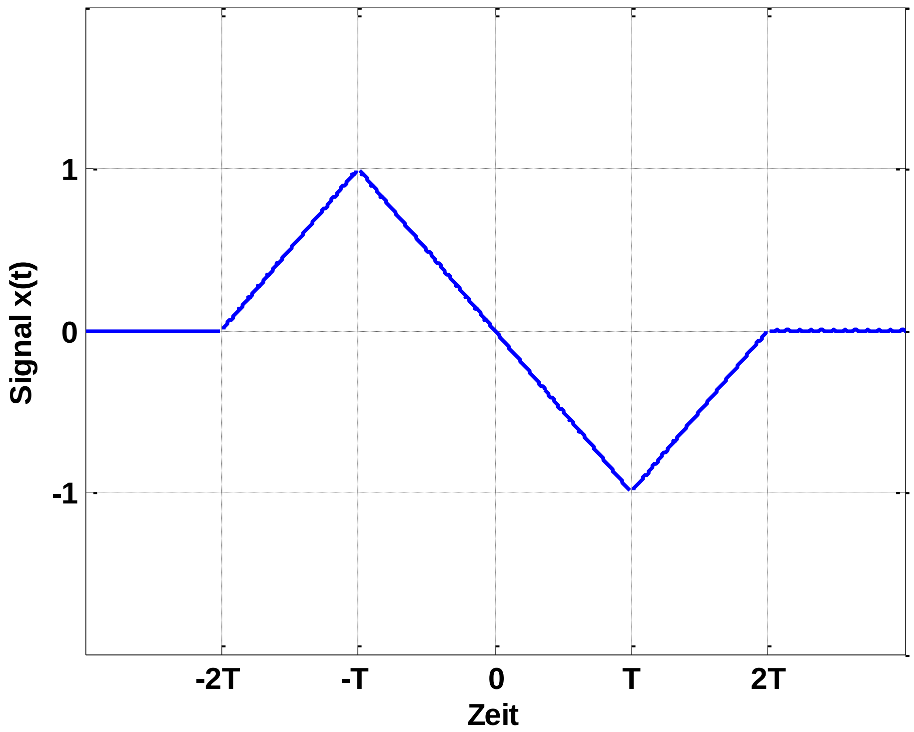
$$= \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{1}{R^2 \cdot C^2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\frac{1}{R^2 \cdot C^2} + \omega^2}\, d\omega = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{1}{R^2 \cdot C^2} \cdot R \cdot C \cdot \arctan(\omega \cdot R \cdot C) \Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{R \cdot C}$$

- Ergebnisse der Berechnung im Zeit- und Frequenzbereich stimmen erwartungsgemäß überein

Spektrum von Signalen

Übungsaufgabe: Fourier-Transformation – Rechenregeln

- Zeitfunktion x(t) ist definiert durch den abgebildeten Verlauf
- Berechnen Sie die Fourier-Transformierte durch Ausnutzen der Rechenregeln der Fourier-Transformation



Spektrum von Signalen

Fourier-Transformation – Vergleich mit Fourier-Reihe

- Beschreibung eines periodischen Signals x(t) über eine Fourier-Reihe mit komplexen Koeffizienten A_n

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \cdot e^{j \cdot n \cdot \omega_0 \cdot t}$$

- Komplexe Fourier-Koeffizienten errechnen sich zu

$$A_n = \frac{1}{T_0} \cdot \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) \cdot e^{-j \cdot n \cdot \omega_0 \cdot t} \, dt$$

- Andererseits kann das Spektrum $X(\omega)$ über die Fourier-Transformation ermittelt werden

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t} \, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \cdot e^{j \cdot n \cdot \omega_0 \cdot t} \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t} \, dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{j \cdot n \cdot \omega_0 \cdot t} \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t} \, dt$$

- Interpretation als Fourier-Transformierte einer Exponentialfunktion mit imaginärem Argument

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{j \cdot n \cdot \omega_0 \cdot t} \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t} \, dt = 2 \cdot \pi \cdot \delta(\omega - n \cdot \omega_0)$$

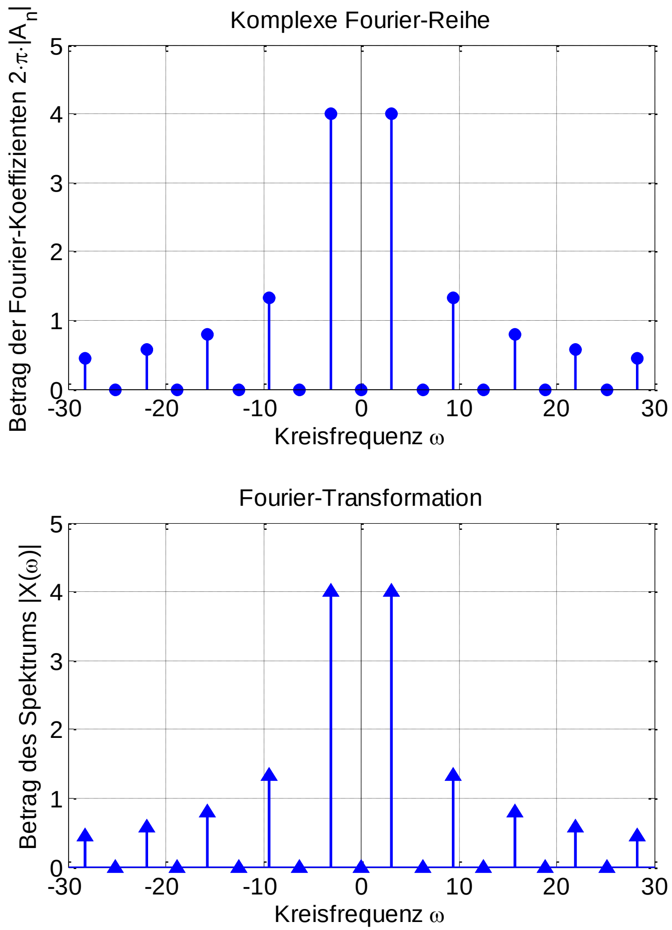
Spektrum von Signalen

Fourier-Transformation – Vergleich mit Fourier-Reihe

- Zusammenhang zwischen der Fourier-Transformierten $X(\omega)$ eines periodischen Signals $x(t)$ und den Fourier-Koeffizienten A_n der Fourier-Reihe

$$X(\omega) = 2 \cdot \pi \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \cdot \delta(\omega - n \cdot \omega_0)$$

- Fourier-Transformierte $X(\omega)$ des periodischen Signals besteht aus Impulsen an den Stellen $n \cdot \omega_0$, die mit den Fourier-Koeffizienten A_n der Fourier-Reihe und dem Faktor $2 \cdot \pi$ gewichtet werden



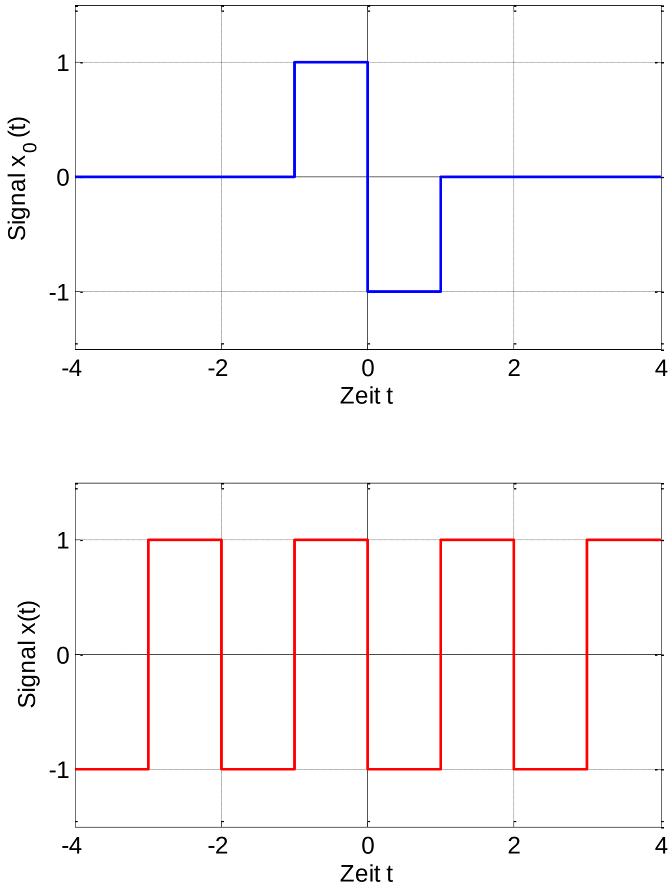
Spektrum von Signalen

Fourier-Transformation – Vergleich mit Fourier-Reihe

- Fourier-Transformierte eines Signals und seiner periodischen Fortsetzung
- Wiederholung eines zeitbegrenzten Signals $x_0(t)$ wird über die Faltungsoperation beschrieben

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_0(t - n \cdot T_0) = x_0(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n \cdot T_0)$$

- Faltung im Zeitbereich entspricht im Frequenzbereich der Multiplikation der jeweiligen Fourier-Transformierten
- Spektrum $X_0(\omega)$ ergibt sich aus dem nicht periodischen Signal $x_0(t)$



Spektrum von Signalen

Fourier-Transformation – Vergleich mit Fourier-Reihe

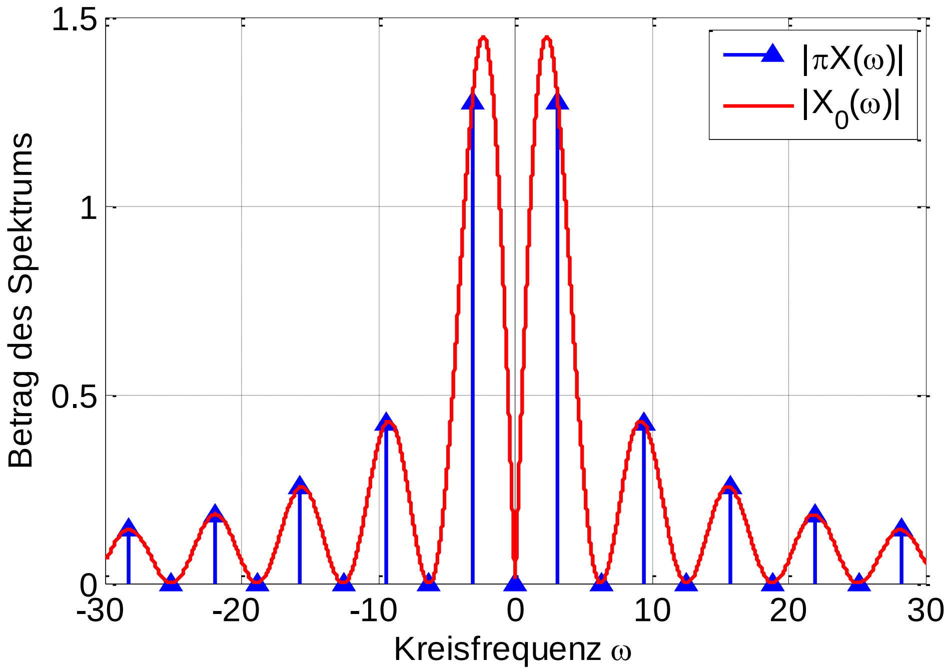
- Spektrum der periodischen Impulsfunktion ergibt sich zu

$$\Im\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(t-n\cdot T_0\right)\right\}=\frac{2\cdot\pi}{T_0}\cdot\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega-n\cdot\omega_0\right)$$

- Damit lautet die Fourier-Transformierte des periodisch wiederholten Signals

$$X(\omega)=\frac{2\cdot\pi}{T_0}\cdot X_0(\omega)\cdot\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega-n\cdot\omega_0\right)$$

- Spektrum $X(\omega)$ der periodisch wiederholten Funktion entspricht an den Stelle $n\cdot\omega_0$ bis auf einen Faktor $2\cdot\pi/T_0$ dem Spektrum $X_0(\omega)$ der nicht periodischen Funktion
- An allen übrigen Frequenzen ist das Spektrum null



Spektrum von Signalen

Fourier-Transformation – Vergleich mit Laplace-Transformation

- Definitionsgleichungen der Laplace-Transformation

$$X(s) = \int_{0}^{\infty} x(t) \cdot e^{-s \cdot t}\ dt$$

und der Fourier-Transformation

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t}\ dt$$

sind sehr ähnlich

- Unter der Annahme kausaler Signale wird die untere Integrationsgrenze der Fourier-Transformation zu t = 0, dadurch steigert sich die Ähnlichkeit weiter

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot \sigma(t) \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t}\ dt = \int_{0}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t}\ dt$$

Spektrum von Signalen

Fourier-Transformation – Vergleich mit Laplace-Transformation

- Formeller Vergleich legt nahe, dass sich die Fourier-Transformierte $X(\omega)$ kausaler Signale aus der Laplace-Transformierten bestimmt werden kann

- Fourier-Integral muss jedoch existieren

- Bei der Diskussion der Laplace-Transformation wird auf den Konvergenzbereich der Laplace-Transformierten eingegangen, liegt die imaginäre Achse $s = j \cdot \omega$ im Konvergenzbereich der Laplace-Transformation, gilt:

$$X(\omega) = X(s)\big|_{s=j\cdot\omega}$$

- Ist die Laplace-Transformierte eines Signals bekannt, kann die Fourier-Transformierte einfach durch Substitution $s = j \cdot \omega$ bestimmt werden

- Gleichung lässt darüber hinaus eine grafische Interpretation des Zusammenhangs von Laplace- und Fourier-Transformierter zu

Spektrum von Signalen

Beispiel: Fourier-Transformation – Vergleich mit Laplace-Transformation

- Berechnung der Fourier-Transformierte eines Signals mit der Laplace-Transformierten

$$X(s) = \frac{1}{s^2 + 2 \cdot s + 5}$$

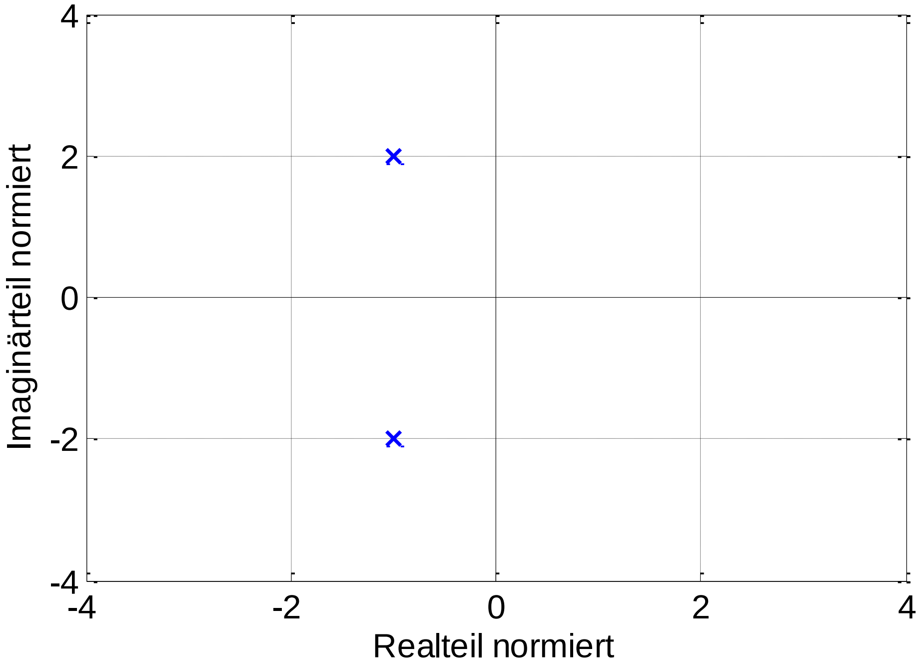
mit dem Konvergenzbereich

$$\mathrm{Re}(s) > -1$$

- Damit liegt die imaginäre Achse im Konvergenz-bereich, es gilt

$$X(\omega) = \left.\frac{1}{s^2 + 2 \cdot s + 5}\right|_{s = j \cdot \omega} = \frac{1}{-\omega^2 + 2 \cdot j \cdot \omega + 5}$$

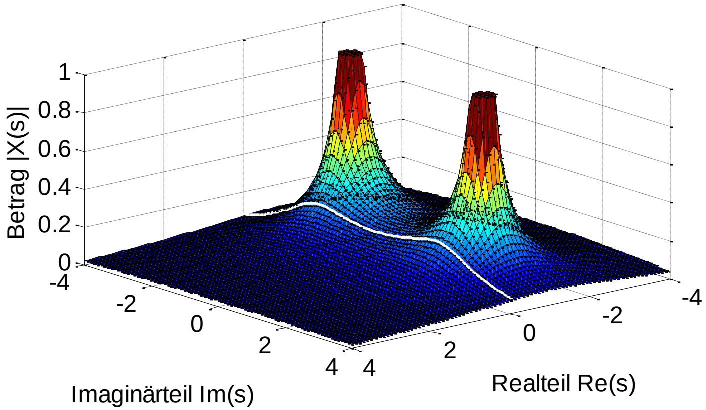
$$= \frac{1}{5 - \omega^2 + 2 \cdot j \cdot \omega}$$

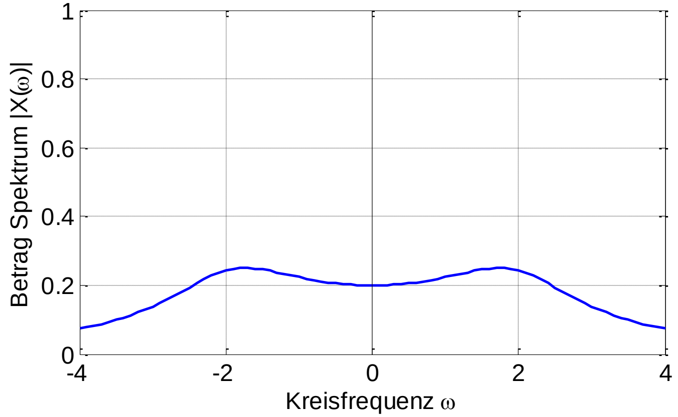


Spektrum von Signalen

Beispiel: Fourier-Transformation – Vergleich mit Laplace-Transformation

- Vergleich der Beträge der Laplace-Transformierten |X(s)| und der Fourier-Transformierten |X(ω)|
- Fourier-Transformierte |X(ω)| entspricht dem Schnitt durch die Ebene an der Stelle s = j·ω
- Fourier-Transformation kann demnach auch grafisch als Sonderfall der Laplace-Transformation aufgefasst werden
- Analoge Aussage trifft auf die Phase φ(ω) zu
- Fourier-Transformierte ist für kausale Signale ein Spezialfall der Laplace-Transformierten





Spektrum von Signalen

Übungsaufgaben: Fourier-Transformation – Rechenregeln

- Gegeben sind die Zeitfunktionen x(t)

$$x_1(t) = e^{-j\cdot\omega_0\cdot t}\cdot\sigma(t) \qquad x_2(t) = \delta(-4\cdot t) \qquad x_3(t) = e^{-j\cdot\omega_0\cdot t}$$

- Berechnen Sie die Fourier-Transformierten $X(\omega)$ über die Definitionsgleichung der Fourier-Transformation
- Berechnen Sie die Fourier-Transformierten $X(\omega)$ über die Rechenregeln der Fourier-Transformation
- Welche der Zeitfunktionen können als Sonderfall der Laplace-Transformation verstanden werden? Begründen Sie Ihre Antwort

Spektrum von Signalen

Fourier-Transformation – Übersicht

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j\cdot\omega\cdot t}\, dt$$

$$x(t) = \frac{1}{2\cdot\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \cdot e^{j\cdot\omega\cdot t}\, d\omega$$

$$X(\omega) = X(s)\big|_{s=j\cdot\omega}$$

Fourier-Transformation

Inverse Fourier-Transformation

Laplace-Transformation

Energiesignale

Leistungssignale

Kausale Signale, Re(α) < 0

Signal x(t)

Verwendung bekannter Korrespondenzen

Periodische Signale

Dualität

Rechenregeln

Fourier-Reihe

$$y(t) = X(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\; 2\cdot\pi\cdot x(-\omega) = Y(\omega)$$

$$X(\omega) = 2\cdot\pi\cdot\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \cdot \delta(\omega - n\cdot\omega_0)$$