Hochschule Karlsruhe
Technik und Wirtschaft
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES
Näher dran.

EIT Fakultät für Elektro- und Informationstechnik

Systemtheorie

Vorlesung 21: Frequenzgang von Systemen

Fakultät für Elektro- und Informationstechnik, Manfred Strohrmann

Frequenzgang von Systemen

Grundlagen

- Signale können über ihr Spektrum beschrieben werden
- Entsprechend kann stabilen LTI-Systemen ein sogenannter Frequenzgang zugeordnet werden
- Herleitung des Frequenzgangs auf unterschiedlichen Wegen, Vernetzung von Zeit-, Laplace- und Frequenzbereich
  - Berechnung des Frequenzgangs aus der Differentialgleichung
  - Faltungsregel der Fourier-Transformation
  - Zusammenhang zwischen Frequenzgang und Übertragungsfunktion
- Beschreibung der Auswirkung eines Frequenzgangs auf das Spektrum des Ausgangssignals
  - Anregung mit einer harmonischen Schwingung
  - Anregung mit einem periodischen Signal

Frequenzgang von Systemen

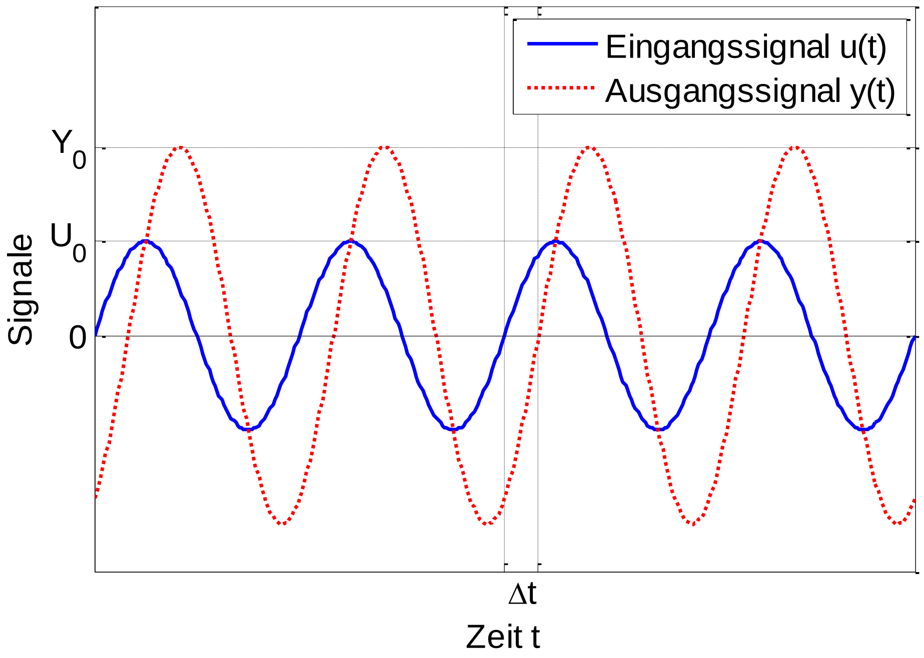
Motivation des Begriffes Frequenzgang

- Stabile LTI-Systeme antworten bei einer harmonischen Anregung mit der Kreisfrequenz ω_0

$$u(t) = U_0 \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \varphi_U)$$

mit einer harmonischen Systemantwort gleicher Frequenz

$$y(t) = Y_0 \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \varphi_Y)$$
$$= U_0 \cdot A(\omega_0) \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \varphi_U + \varphi(\omega_0))$$



- Amplitude und Nullphasenwinkel von Ein- und Ausgangssignal sind im Allgemeinen unterschiedlich

- Wie können Amplitude und Nullphasenwinkel des Ausgangssignals bestimmt werden?

Frequenzgang von Systemen

Grundlagen – Frequenzgang und Differentialgleichung

- Herleitung des Frequenzgangs über lineare Differentialgleichung

$$\sum_{n=0}^{N} a_n \cdot \frac{d^n y}{dt^n} = \sum_{m=0}^{M} b_m \cdot \frac{d^m u}{dt^m}$$

- Differentiationsregel der Fourier-Transformation

$$\sum_{n=0}^{N} a_n \cdot (j \cdot \omega)^n \cdot Y(\omega) = \sum_{m=0}^{M} b_m \cdot (j \cdot \omega)^m \cdot U(\omega)$$

- Aus der Differentialgleichung im Zeitbereich ist im Frequenzbereich ein Polynom geworden
- Ausklammern der Funktionen $Y(\omega)$ und $U(\omega)$ und Auflösen nach $Y(\omega)$ führt zum Frequenzgang $G(\omega)$ des Systems

$$Y(\omega) = \frac{\sum_{m=0}^{M} b_m \cdot (j \cdot \omega)^m}{\sum_{n=0}^{N} a_n \cdot (j \cdot \omega)^n} \cdot U(\omega) = G(\omega) \cdot U(\omega)$$

Frequenzgang von Systemen

Grundlagen – Frequenzgang und Differentialgleichung

- Frequenzgang ist die Übertragungsfunktion im Frequenzbereich

$$G(\omega) = \frac{Y(\omega)}{U(\omega)} = \frac{\sum_{m=0}^{M} b_m \cdot (j \cdot \omega)^m}{\sum_{n=0}^{N} a_n \cdot (j \cdot \omega)^n}$$

- Frequenzgang $G(\omega)$ ist ein komplexer Wert mit Betrag und Phase
- Betrag $|G(\omega)|$ gibt an, mit welchem Faktor die Amplitude des Eingangssignals der Frequenz ω multipliziert wird, er wird als Amplitudengang bezeichnet
- Phase $\varphi(\omega)$ gibt an, welche Phasenverschiebung zwischen Aus- und Eingangssignal vorhanden ist, sie wird als Phasengang bezeichnet

Frequenzgang von Systemen

Übungsaufgabe: Grundlagen – Frequenzgang und Differentialgleichung

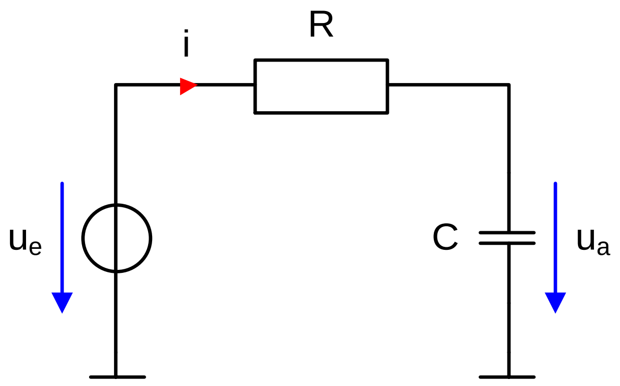
- RC-Netzwerk mit Differentialgleichung

$$u_E(t) = R \cdot C \cdot \frac{du_A}{dt} + u_A(t)$$

- Berechnen Sie den Frequenzgang der Schaltung
- System wird mit einem kosinusförmigen Eingangssignal der Kreisfrequenz ω_0 angeregt

$$u_E(t) = U_{E0} \cdot \cos(\omega_0 \cdot t)$$

- Berechnen Sie das Ausgangssignal $u_A(t)$



Frequenzgang von Systemen

Grundlagen – Faltungsregel der Fourier-Transformation

- Faltungsregel der Fourier-Transformation kann zur Herleitung des Frequenzgangs eines Systems verwendet werden
- Ausgangssignal y(t) eines LTI-Systems errechnet sich bei bekannter Impulsantwort g(t) zu

$$y(t) = g(t) * u(t)$$

- Mit der Faltungsregel der Fourier-Transformation kann die Gleichung in den Frequenzbereich überführt werden

$$Y(\omega) = G(\omega) \cdot U(\omega)$$

- Frequenzgang $G(\omega)$ ist die Fourier-Transformierte der Impulsantwort

$$G(\omega) = \frac{Y(\omega)}{U(\omega)} = \frac{\sum_{m=0}^{M} b_m \cdot (j \cdot \omega)^m}{\sum_{n=0}^{N} a_n \cdot (j \cdot \omega)^n}$$

Frequenzgang von Systemen

Beispiel: Grundlagen – Faltungsregel der Fourier-Transformation

- RC-Glied besitzt die Impulsantwort

$$g(t) = \frac{1}{R \cdot C} \cdot e^{-\frac{1}{R \cdot C} \cdot t} \cdot \sigma(t)$$

- Transformation der Impulsantwort in den Frequenzbereich

$$G(\omega) = \frac{1}{R \cdot C} \cdot \frac{1}{j \cdot \omega + \frac{1}{R \cdot C}} = \frac{1}{j \cdot \omega \cdot R \cdot C + 1}$$

- Fourier-Transformierte stimmt mit dem berechneten Frequenzgang des Systems überein
- Spektrum des Ausgangssignals

$$U_A(\omega) = \frac{1}{1 + j \cdot \omega \cdot R \cdot C} \cdot U_E(\omega)$$

Frequenzgang von Systemen

Grundlagen – Frequenzgang und Übertragungsfunktion im Laplace-Bereich

- Vergleich von Fourier- und Laplace-Transformation vorgenommen
- Fourier-Transformierte $X(\omega)$ ergibt sich direkt aus der Laplace-Transformierten $X(s)$, wenn die imaginäre Achse $s = j\cdot\omega$ im Konvergenzbereich der Laplace-Transformation liegt

$$X(\omega) = X(s)\big|_{s=j\cdot\omega}$$

- Bedingung ist bei der Übertragungsfunktion $G(s)$ eines LTI-Systems erfüllt, wenn das System kausal und asymptotisch stabil ist, damit gilt für asymptotisch stabile Systeme

$$G(\omega) = G(s)\big|_{s=j\cdot\omega}$$

- Frequenzgang $G(\omega)$ kann bei kausalen und asymptotisch stabilen Systemen direkt aus der Übertragungsfunktion bestimmt werden

Frequenzgang von Systemen

Beispiel: Grundlagen – Frequenzgangs und Übertragungsfunktion im Laplace-Bereich

- RC-Glied besitzt die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{U_A(s)}{U_E(s)} = \frac{1}{1 + s \cdot R \cdot C}$$

- Pol der Übertragungsfunktion liegt an der Stelle

$$\alpha = -\frac{1}{R \cdot C}$$

- System ist demnach kausal und asymptotisch stabil, Übertragungsfunktion kann berechnet werden zu

$$G(\omega) = G(s)\Big|_{s = j \cdot \omega} = \frac{1}{1 + j \cdot \omega \cdot R \cdot C}$$

Frequenzgang von Systemen

Zusammenfassung: Grundlagen

Ausgangspunkt	Berechnungsmöglichkeit
Differentialgleichung im Zeitbereich $$\sum_{n=0}^{N} a_n \cdot \frac{d^n y}{dt^n} = \sum_{m=0}^{M} b_m \cdot \frac{d^m u}{dt^m}$$	Differentiationsregel der Fourier-Transformation $$\sum_{n=0}^{N} a_n \cdot (j \cdot \omega)^n \cdot Y(\omega) = \sum_{m=0}^{M} b_m \cdot (j \cdot \omega)^m \cdot U(\omega)$$
Faltungsoperation im Zeitbereich $$y(t) = g(t) * u(t)$$	Faltungsregel der Fourier-Transformation $$Y(\omega) = G(\omega) \cdot U(\omega)$$
Übertragungsfunktion im Laplace-Bereich bei asymptotisch stabilen Systemen $$Y(s) = G(s) \cdot U(s)$$	Zusammenhang zwischen Fourier- und Laplace-Transformation bei stabilen Systemen $$G(\omega) = G(s)\big|_{s=j\cdot\omega}$$

Frequenzgang von Systemen

Grundlagen – Amplituden- und Frequenzgang

- Beschreibung einer harmonischen Anregung mit der Kreisfrequenz ω_0

$$u(t) = U_0 \cdot \cos(\omega_0 \cdot t)$$

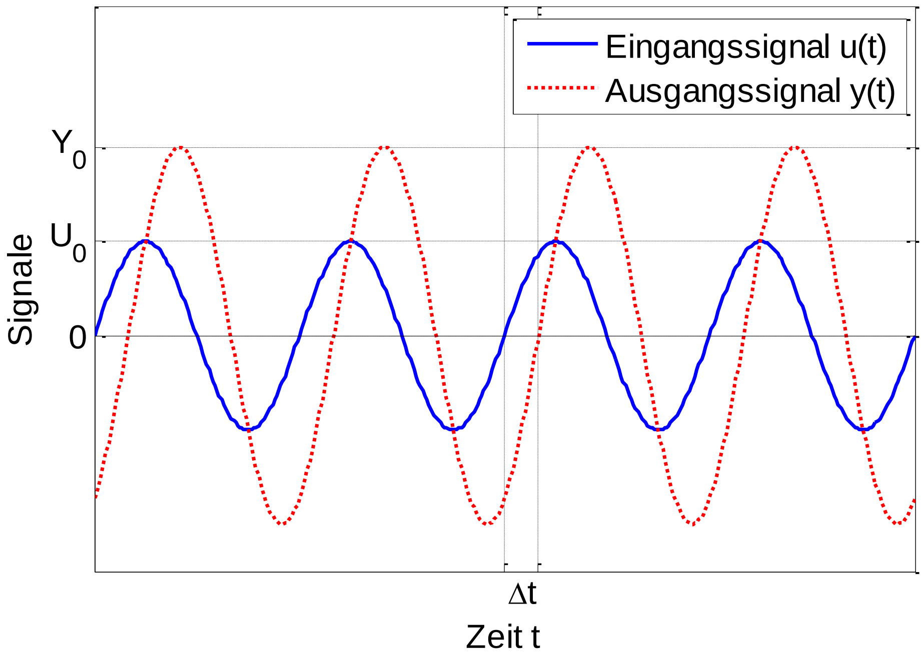
im Frequenzbereich

$$U(\omega) = U_0 \cdot \pi \cdot \left(\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)\right)$$

- Berechnung des Spektrums des Ausgangssignals

$$Y(\omega) = G(\omega) \cdot U(\omega)$$

$$= U_0 \cdot \pi \cdot \left(G(-\omega_0) \cdot \delta(\omega + \omega_0) + G(\omega_0) \cdot \delta(\omega - \omega_0)\right)$$



Frequenzgang von Systemen

Grundlagen – Amplituden- und Frequenzgang

- Symmetrieeigenschaften des Frequenzgangs eines stabilen LTI-Systems

$$A(-\omega) = A(\omega) \qquad \varphi(-\omega) = -\varphi(\omega)$$

- Spektrum $Y(\omega)$ des Ausgangssignals

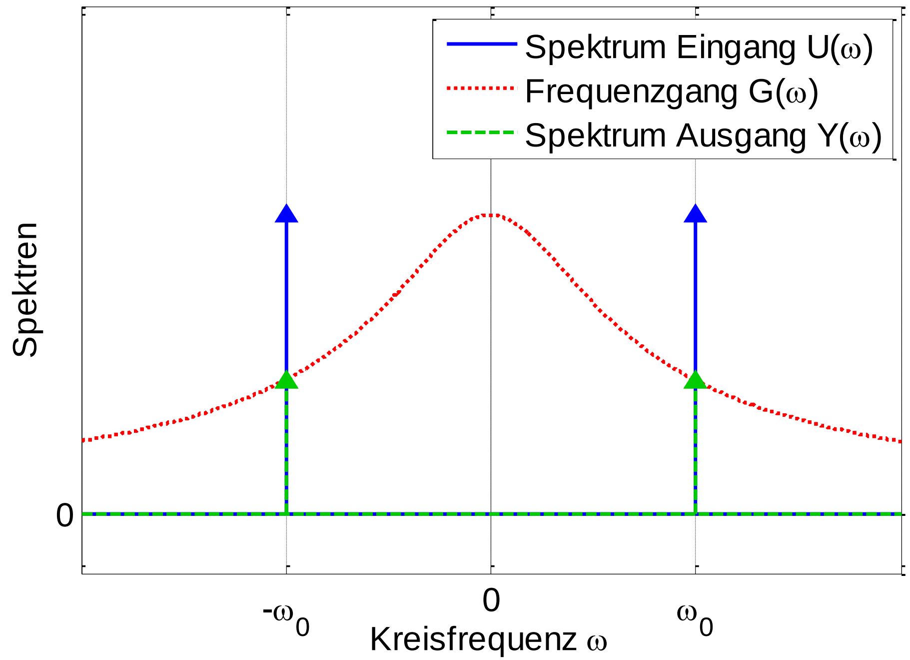
$$Y(\omega) = U_0 \cdot \pi \cdot \left(G(-\omega_0) \cdot \delta(\omega + \omega_0) + G(\omega_0) \cdot \delta(\omega - \omega_0) \right)$$

$$= U_0 \cdot \pi \cdot A(\omega_0) \cdot \left(e^{-j \cdot \varphi(\omega_0)} \cdot \delta(\omega + \omega_0) + e^{j \cdot \varphi(\omega_0)} \cdot \delta(\omega - \omega_0) \right)$$

- Ausgangssignal $y(t)$ im Zeitbereich

$$y(t) = U_0 \cdot \pi \cdot A(\omega_0) \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \left(e^{-j \cdot \varphi(\omega_0)} \cdot e^{-j \cdot \omega_0 \cdot t} + e^{j \cdot \varphi(\omega_0)} \cdot e^{j \cdot \omega_0 \cdot t} \right)$$

$$= U_0 \cdot A(\omega_0) \cdot \cos\left(\omega_0 \cdot t + \varphi(\omega_0) \right)$$



Frequenzgang von Systemen

Grundlagen – Amplituden- und Frequenzgang

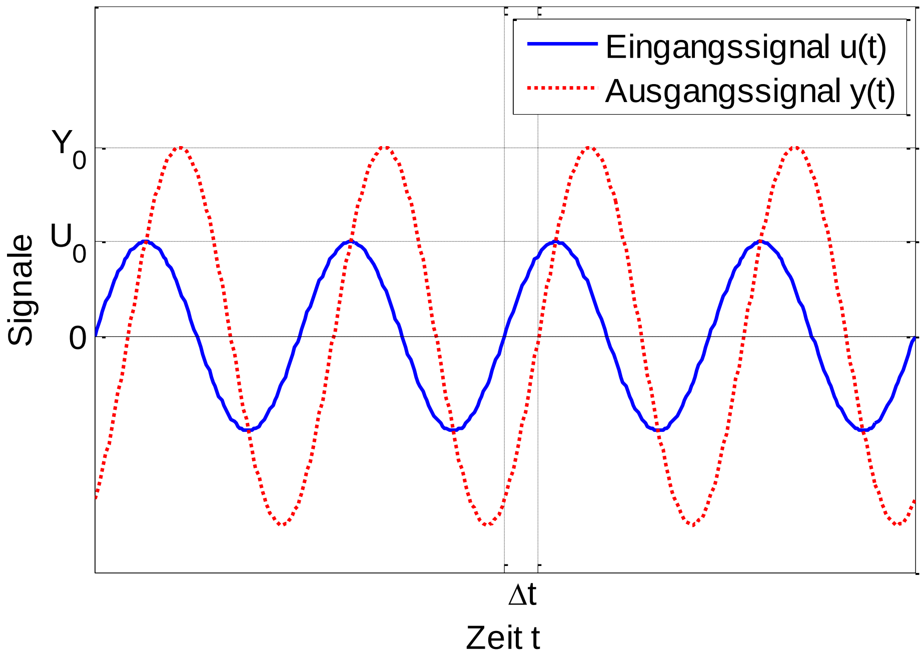
- Amplitudengang an der Stelle $\omega = \omega_0$ gibt das Verhältnis der Amplituden von Ausgangssignal und Ausgangssignal an

$$A(\omega_0) = \frac{Y_0}{U_0}$$

- Phasengang $\varphi(\omega)$ gibt die Differenz der Nullphasenwinkel an

$$\varphi(\omega_0) = \varphi_Y - \varphi_U = \omega_0 \cdot \Delta t$$

- Interpretation gilt zunächst nur für harmonische Eingangssignale, kann aber auch auf periodische und nichtperiodische Signale erweitert werden



Frequenzgang von Systemen

Grundlagen – Amplituden- und Frequenzgang

Frequenzgang	$G(\omega)=\frac{Y(\omega)}{U(\omega)}$	Frequenzgang ist eine komplexwertige Funktion und kann in Betrag und Phase aufgeteilt werden
Amplitudengang	$A(\omega)=\lvert G(\omega)\rvert$	Verhältnis der Amplituden von Aus- zu Eingangssignal als Funktion der Kreisfrequenz, mit der das System angeregt wird
Phasengang	$\varphi(\omega)=\angle G(\omega)$	Differenz der Nullphasenwinkel von Aus- und Eingangssignal als Funktion der Kreisfrequenz, mit der das System angeregt wird

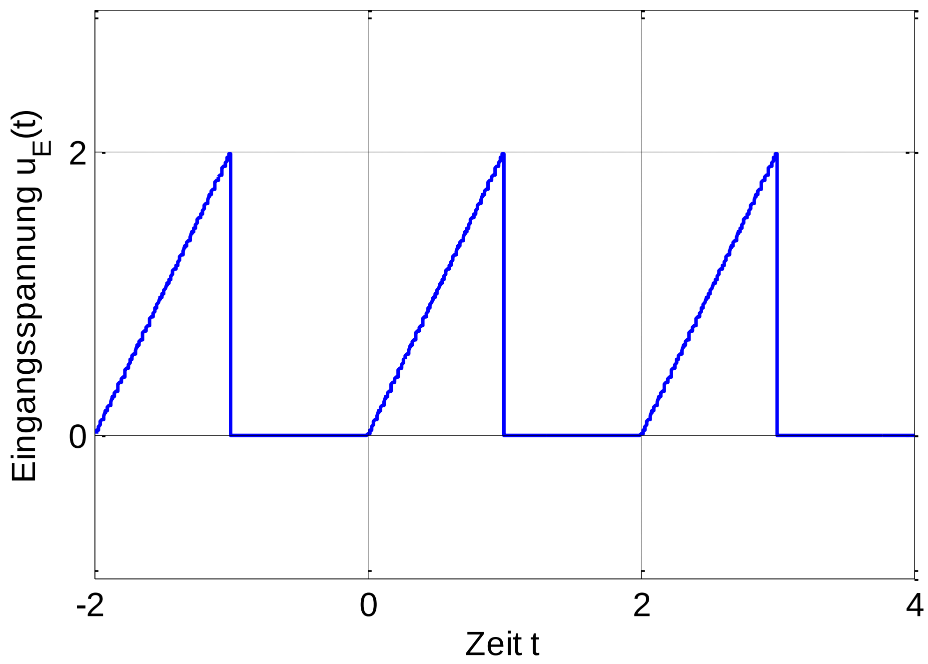
Frequenzgang von Systemen

Übungsaufgabe: Grundlagen – Frequenzgang (1/2)

- RLC-Schaltung mit dem folgenden Ersatz-schaltbild und den Bauelementwerten R = 0.01, C = 1 und L = 1 wird mit einem Spannungssignal $u_E(t)$ angeregt
- Eingangssignal $u_E(t)$ ist periodisch und in der folgenden Grafik dargestellt
- Stellen Sie das Eingangssignal $u_E(t)$ als komplexe Fourier-Reihe dar

$$A_n = \frac{(-1)^n - 1}{n^2 \cdot \pi^2} + j \cdot \frac{(-1)^n}{n \cdot \pi}$$

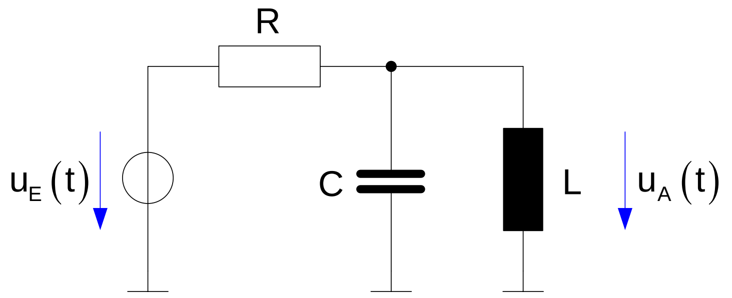
- Beschreiben Sie mit eigenen Worten die Bedeutung der komplexen Fourier-Koeffizienten A_n

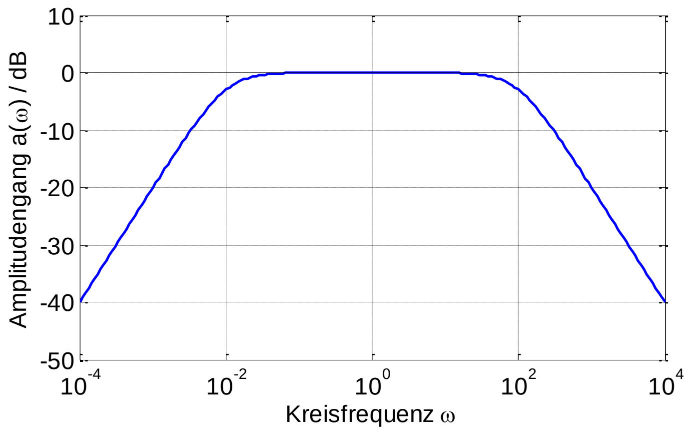


Frequenzgang von Systemen

Übungsaufgabe: Grundlagen – Frequenzgang

- Berechnen Sie allgemein die Übertragungsfunktion der RLC-Schaltung





- Geben Sie den Frequenzgang der Schaltung an, um was für einen Filtertyp handelt es sich?

- Geben Sie eine Gleichung für das Ausgangssignal $u_A(t)$ an, das sich bei Anregung der Schaltung mit dem Eingangssignal $u_E(t)$ ergibt