



Hochschule Karlsruhe  
Technik und Wirtschaft  
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

**Näher dran.**

**EIT** Fakultät für Elektro-  
und Informationstechnik

# Systemtheorie

## Vorlesung 21: Darstellung des Frequenzgangs

# Frequenzgang von Systemen

## Grundlagen

- Signale können über ihr Spektrum beschrieben werden
- Entsprechend kann stabilen LTI-Systemen ein sogenannter Frequenzgang zugeordnet werden
- Herleitung des Frequenzgangs auf unterschiedlichen Wegen, Vernetzung von Zeit-, Laplace- und Frequenzbereich
  - Berechnung des Frequenzgangs aus der Differentialgleichung
  - Faltungsregel der Fourier-Transformation
  - Zusammenhang zwischen Frequenzgang und Übertragungsfunktion
- Grafische Darstellung des Frequenzgangs als Ortskurve, Frequenzkennlinie und als Bode-Diagramm
- Messung des Frequenzgangs

# Frequenzgang von Systemen

## Grundlagen – Amplituden- und Frequenzgang

Frequenzgang	$G(\omega) = \frac{Y(\omega)}{U(\omega)}$	Frequenzgang ist eine komplexwertige Funktion und kann in Betrag und Phase aufgeteilt werden
Amplitudengang	$A(\omega) =  G(\omega) $	Verhältnis der Amplituden von Aus- zu Eingangssignal als Funktion der Kreisfrequenz, mit der das System angeregt wird
Phasengang	$\varphi(\omega) = \angle G(\omega)$	Differenz der Nullphasenwinkel von Aus- und Eingangssignal als Funktion der Kreisfrequenz, mit der das System angeregt wird

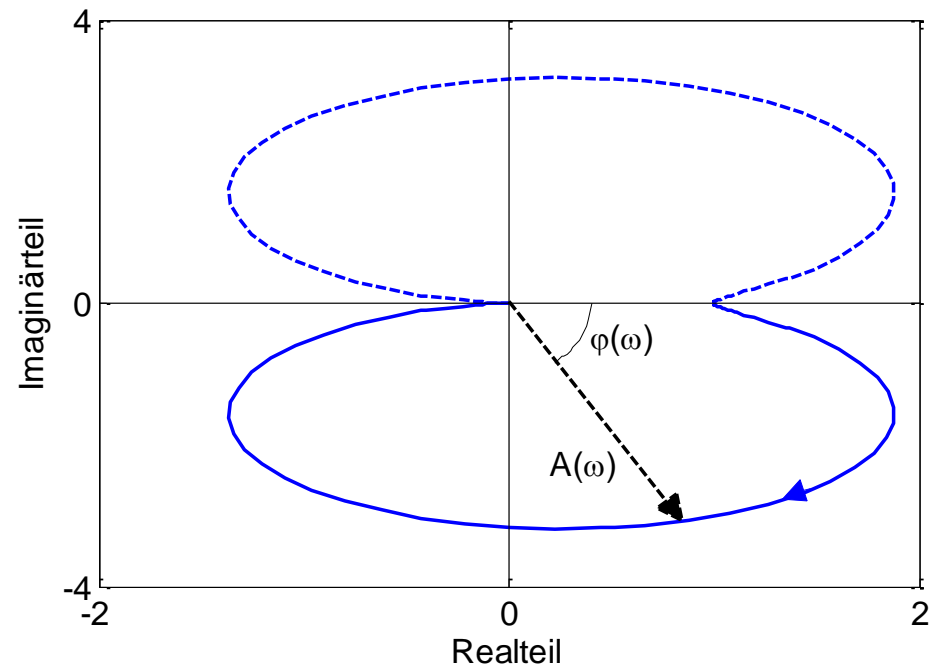
# Frequenzgang von Systemen

## Grafische Darstellung – Ortskurve des Frequenzgangs

- Frequenzgang  $G(\omega)$  kann in Polarkoordinaten-Schreibweise dargestellt werden

$$G(\omega) = A(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)}$$

- Betrag  $A(\omega)$  kann als Länge eines Zeigers in der komplexen Ebene interpretiert werden, der zur reellen Achse den Winkel  $\varphi(\omega)$  aufweist
- Frequenzen  $-\infty \leq \omega \leq \infty$  führen zur sogenannten Ortskurve
- Frequenz ist Parameter zur Bestimmung von Wertepaaren zu Betrag und Phase
- Interpretation des Frequenzgangs in Kombination mit Aussagen zur Frequenz nicht direkt möglich
- Anwendung in Regelungstechnik, Stabilitätsaussagen mit Nyquist-Diagrammen



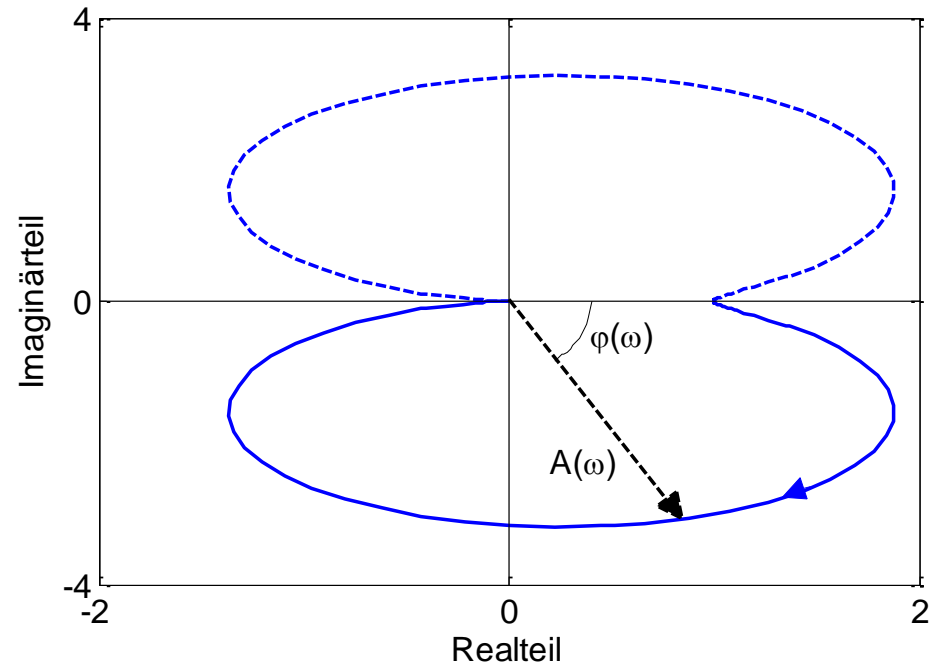
# Frequenzgang von Systemen

## Beispiel: Grafische Darstellung – Ortskurve des Frequenzgangs

- System mit Frequenzgang

$$G(\omega) = \frac{10}{s^2 + s + 10} \Big|_{s=j\omega} = \frac{10}{10 - \omega^2 + j \cdot \omega}$$

- Kurve startet für  $\omega = 0$  in dem Punkt  $G(0) = 1$ .
- Für  $\omega \rightarrow \infty$  erreicht die Ortskurve den Koordinatenursprung
- Für  $\omega > 0$  wird der Imaginärteil des Nenners positiv, was zu einem negativen Imaginärteil des Frequenzgangs führt
- Ortskurve wird demnach in Pfeilrichtung durchlaufen
- Für  $\omega < 0$  wird aus Symmetriegründen die gestrichelte Ortskurve durchlaufen, keine zusätzliche Information

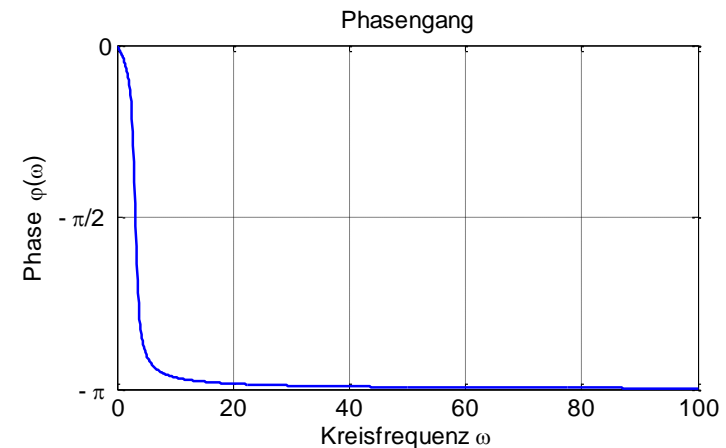
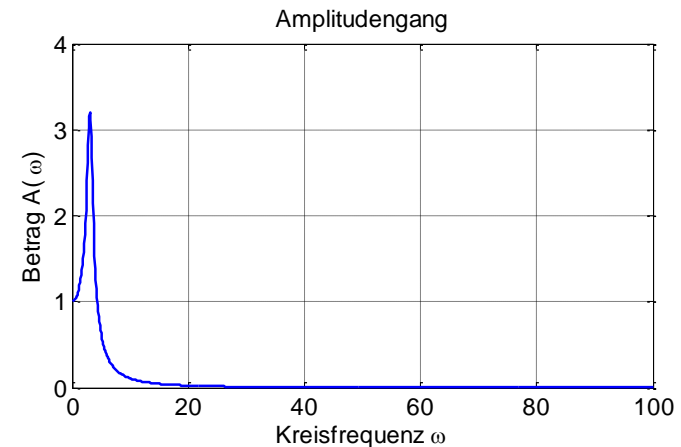


# Frequenzgang von Systemen

## Grafische Darstellung – Frequenzkennlinien-Diagramme

- Frequenzkennlinien-Diagramm stellt Betrag und Phase als Funktion der Kreisfrequenz  $\omega$  dar
- Durch separate Darstellung von Amplituden- und Phasengang als Funktion der Kreisfrequenz  $\omega$  bleibt die Frequenzinformation erhalten
- Aufgrund der Symmetrie des Frequenzgangs beschränkt sich der dargestellte Frequenzbereich auf  $\omega \geq 0$
- Beispiel

$$G(\omega) = \frac{10}{10 - \omega^2 + j \cdot \omega}$$
$$= \sqrt{\frac{10}{(10 - \omega^2)^2 + \omega^2}} \cdot e^{-j \arctan\left(\frac{\omega}{10 - \omega^2}\right)}$$



# Frequenzgang von Systemen

## Grafische Darstellung – Bode-Diagramme

- In Frequenzkennlinien-Diagrammen werden große Zahlenbereiche dargestellt
- Im Bode-Diagramm wird der Logarithmus des Verhältnisses von Ausgangs- zu Eingangsleistung eines Systems dargestellt, Größe besitzt die Einheit Bel
- Unter Berücksichtigung der Leistungsdefinition von Signalen kann die Größe auf das Verhältnis der Amplituden zurückgeführt werden

$$\log\left(\frac{P_A(\omega)}{P_E(\omega)}\right) = \log\left(\frac{|U_A(\omega)|^2}{|U_E(\omega)|^2}\right) = 2 \cdot \log\left(\left|\frac{U_A(\omega)}{U_E(\omega)}\right|\right) = 2 \cdot \log(A(\omega))$$

- Im praktischen Einsatz wird statt der Einheit Bel das Dezibel verwendet, das einem zehnten Teil des Bel entspricht, Größe  $a(\omega)$  ist definiert als

$$a(\omega) = 20 \cdot \log(A(\omega)) = 20 \cdot \log\left(\left|\frac{U_A(\omega)}{U_E(\omega)}\right|\right)$$

# Frequenzgang von Systemen

## Grafische Darstellung – Bode-Diagramme

- Zur Unterscheidung von linearem Amplitudengang  $A(\omega)$  wird der logarithmische Amplitudengang  $a(\omega)$  klein geschrieben
- Tabellarische Übersicht einiger wichtiger Zahlenwerte in Dezibel

Zahlenwert linear	Logarithmischer Wert
10	20 dB
$\sqrt{2}$	3 dB
1	0 dB
$1/\sqrt{2}$	-3 dB
1/10	-20 dB
$10 \cdot 10$	20 dB + 20 dB = 40 dB



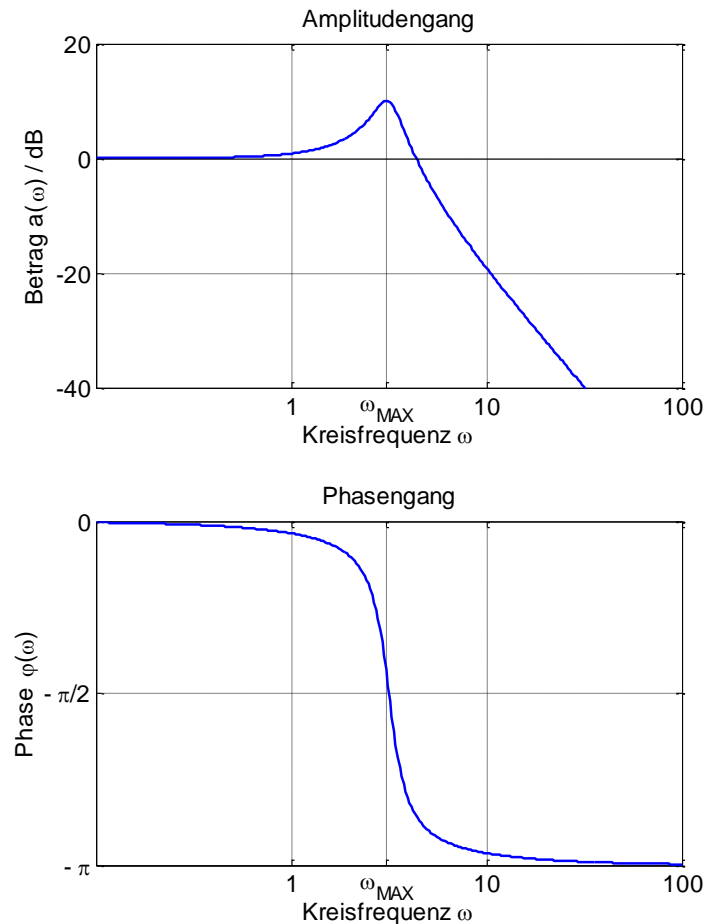
# Frequenzgang von Systemen

## Beispiel: Grafische Darstellung – Bode-Diagramme

- Bode-Diagramm für

$$G(\omega) = \frac{10}{s^2 + s + 10} \Big|_{s=j\omega} = \frac{10}{10 - \omega^2 + j \cdot \omega}$$

- Amplitudengang steigt bis zu einer Frequenz  $\omega_{\text{MAX}} = 3.16$  leicht an, und fällt mit steigender Frequenz steil ab
- Phasengang beginnt mit einer Phase von  $\varphi(0) = 0$  und fällt nichtlinear mit der Frequenz auf  $\varphi(\infty) = -\pi$
- Bei der Frequenz  $\omega_{\text{MAX}} = 3.16$  erreicht der Phasengang eine Phase von  $\varphi(3.1) \approx -\pi/2$



# Frequenzgang von Systemen

## Grafische Darstellung – Vorteile Bode-Diagramme

- Bode-Diagramme weisen durch spezielle Darstellungsform einige grafische Vorteile auf
  - Größen mit stark unterschiedlichen Zahlenwerten können grafisch so veranschaulicht werden, dass die Ablesegenauigkeit dem jeweiligen Wert der Größe angemessen ist
  - Darstellung der Frequenzabhängigkeit in Bode-Diagrammen führt häufig auf Geradenabschnitte
- Neben grafischen Vorteilen ergibt sich durch die logarithmische Darstellung eine Vereinfachung bei der Erstellung von Bode-Diagrammen
- Linearfaktor-Darstellung der Übertragungsfunktion  $G(s)$ , Konstanten  $M_m$  und  $N_n$  repräsentieren die Vielfachheit der Linearfaktoren

$$G(s) = \frac{\sum_{m=0}^M b_m \cdot s^m}{\sum_{n=0}^N a_n \cdot s^n} = k \cdot \frac{(s - \beta_1)^{M_1} \cdot (s - \beta_2)^{M_2} \dots}{(s - \alpha_1)^{N_1} \cdot (s - \alpha_2)^{N_2} \dots}$$

# Frequenzgang von Systemen

## Grafische Darstellung – Vorteile Bode-Diagramme

- Berechnung Frequenzgang bei stabilen Systemen

$$G(\omega) = G(s)|_{s=j\omega} = k \cdot \frac{(j\omega - \beta_1)^{M_1} \cdot (j\omega - \beta_2)^{M_2} \dots}{(j\omega - \alpha_1)^{N_1} \cdot (j\omega - \alpha_2)^{N_2} \dots} = |k| \cdot e^{j\varphi_k} \cdot \frac{|j\omega - \beta_1|^{M_1} \cdot e^{jM_1 \cdot \varphi_{\beta_1}(\omega)} \cdot |j\omega - \beta_2|^{M_2} \cdot e^{jM_2 \cdot \varphi_{\beta_2}(\omega)} \dots}{|j\omega - \alpha_1|^{N_1} \cdot e^{jN_1 \cdot \varphi_{\alpha_1}(\omega)} \cdot |j\omega - \alpha_2|^{N_2} \cdot e^{jN_2 \cdot \varphi_{\alpha_2}(\omega)} \dots}$$

- Logarithmischer Amplitudengang in Dezibel

$$a(\omega) = 20 \cdot \log(A(\omega)) = 20 \cdot \log\left( |k| \cdot \frac{|j\omega - \beta_1|^{m_1} \cdot |j\omega - \beta_2|^{m_2} \dots}{|j\omega - \alpha_1|^{n_1} \cdot |j\omega - \alpha_2|^{n_2} \dots} \right)$$

- Mit den Rechenregeln zum Logarithmus kann die Gleichung umgeformt werden zu

$$a(\omega) = 20 \cdot \log(|k|) + \sum_{m=1}^M M_m \cdot 20 \cdot \log(|j\omega - \beta_m|) - \sum_{n=1}^N N_n \cdot 20 \cdot \log(|j\omega - \alpha_n|)$$

- Produkt aus Linearfaktoren in Zähler und Nenner geht in eine Summe über, Betrag  $a(\omega)$  des Frequenzgangs in dB setzt sich aus dem Betrag der einzelnen Linearfaktoren von Zähler und Nenner in dB zusammen, Logarithmen der Zählerfaktoren werden addiert und die Logarithmen der Nennerfaktoren subtrahiert

# Frequenzgang von Systemen

## Grafische Darstellung – Vorteile Bode-Diagramme

- Analog ergibt sich für die Phase

$$\varphi(\omega) = \varphi_k + \sum_{m=1}^M M_m \cdot \varphi_{\beta m}(\omega) - \sum_{n=1}^N N_n \cdot \varphi_{\alpha n}(\omega)$$

- Auch die Phase des Gesamtsystems setzt sich aus der Phase der einzelnen Linearfaktoren in der Übertragungsfunktion zusammen, Phasen der Zählerfaktoren werden addiert und die Phasen der Nennerfaktoren subtrahiert
- Veränderung eines Parameters  $\alpha_n$  oder  $\beta_m$  eines Übertragungsgliedes verändert nur dessen Anteil in Betrag und Phase des Gesamtfrequenzgangs
- Bode-Diagramm hat damit entscheidende Vorteile bei der Darstellung des Frequenzgangs von Systemketten, sie ergeben sich aus der grafischen Addition der Frequenzgänge einzelner Übertragungsglieder
- Aufgabe, ein Bode-Diagramm zu erstellen, lässt sich auf das Aufstellen von wenigen Bode-Diagrammen reduzieren, die überlagert werden, Vorgehen entspricht dem in Grundlagen der Elektrotechnik und wird in der Regelungstechnik weiter vertieft

# Frequenzgang von Systemen

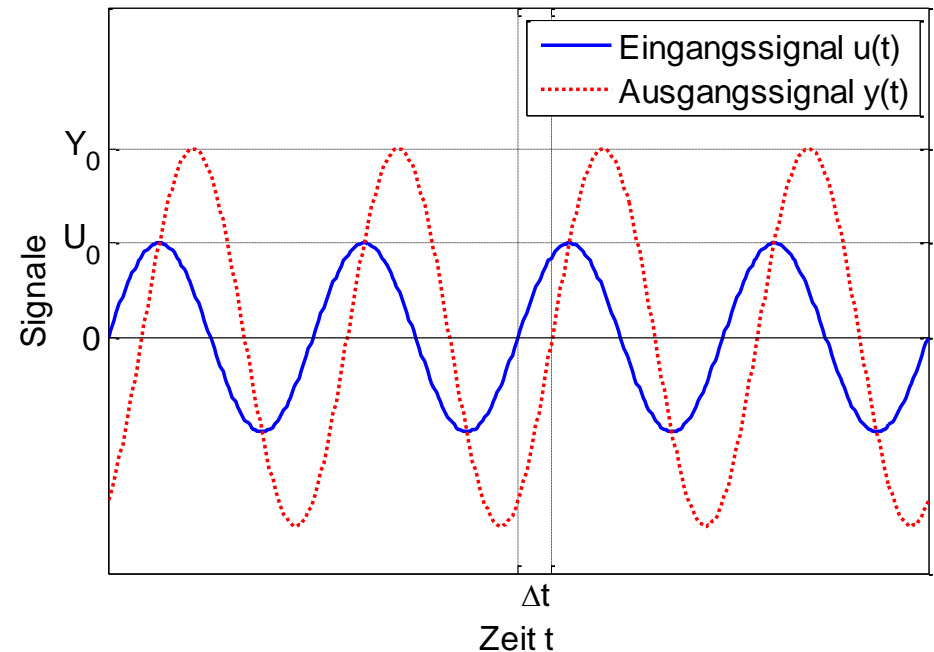
## Messung des Frequenzgangs

- Frequenzgang kann an einigen Stellen gemessen werden
- Aus den Messwerten kann der zugehörige Frequenzgang bestimmt werden
- Zur messtechnischen Bestimmung des Frequenzgangs wird das System mit einem harmonischen Eingangssignal der Frequenz  $\omega_0$  angeregt

$$u(t) = U_0 \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \varphi_U)$$

- Nach Abklingen der Einschaltvorgänge antwortet das System mit einem Signal gleicher Frequenz aber unterschiedlicher Amplitude und Phase

$$y(t) = Y_0 \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \varphi_Y) = U_0 \cdot A(\omega_0) \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \varphi_U + \varphi(\omega_0))$$



# Frequenzgang von Systemen

## Messung des Frequenzgangs

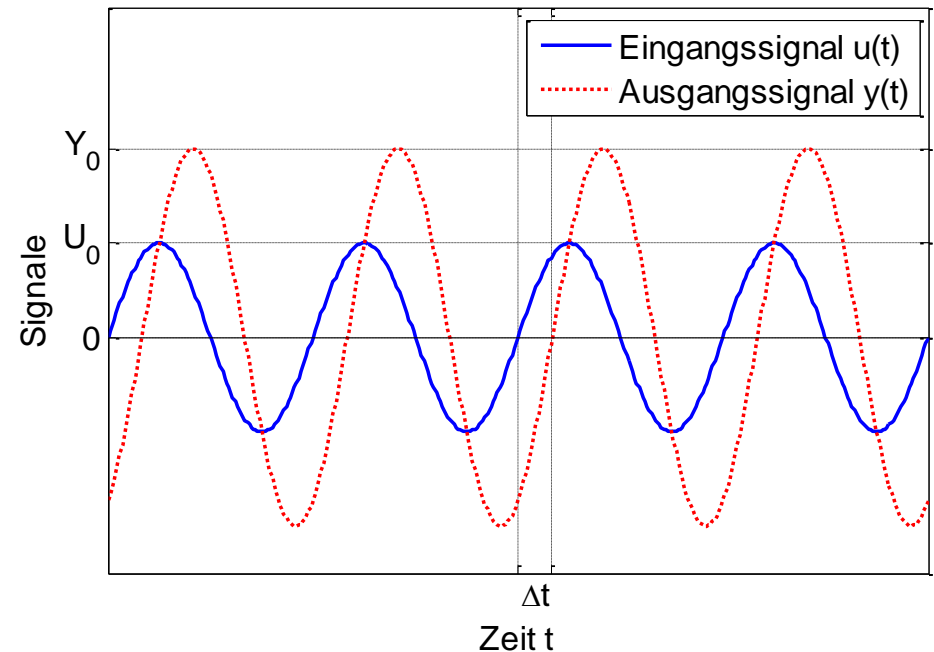
- Bestimmung des Amplitudengangs an der Stelle  $\omega = \omega_0$  über Verhältnis der Amplituden von Eingangssignal und Ausgangssignal

$$A(\omega_0) = \frac{Y_0}{U_0}$$

- Über die Nulldurchgänge lässt sich die Zeitverschiebung  $\Delta t$  von Aus- zu Eingangssignal bestimmen, Umrechnung der zeitlichen Verschiebung  $\Delta t$  führt zum Phasengang

$$\varphi(\omega_0) = \varphi_Y - \varphi_U = \omega_0 \cdot \Delta t$$

- Frequenz  $\omega_0$  wird variiert, bis der gesamte Frequenzbereich mit einer ausreichenden Auflösung abgedeckt ist
- Logarithmische Stützstellenlage empfehlenswert



# Frequenzgang von Systemen

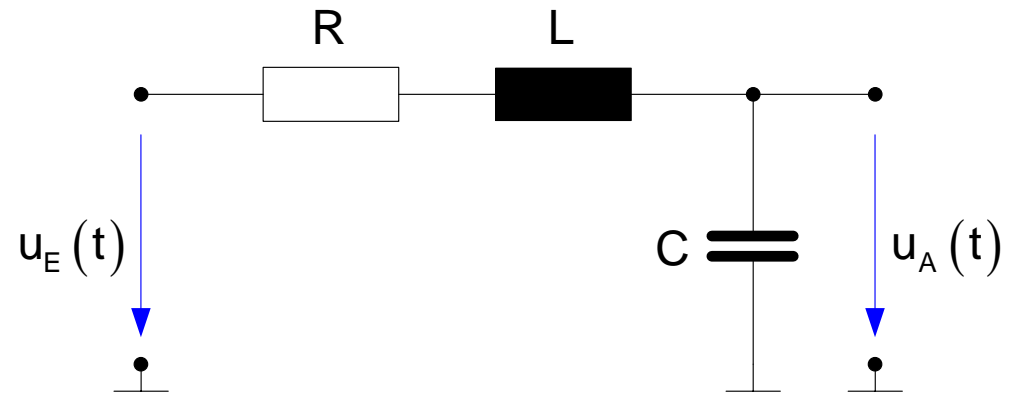
## Beispiel: Messung des Frequenzgangs

- Messung des Frequenzgangs für eine RLC-Schaltung mit den Bauelementen  $R = 20 \Omega$ ,  $L = 1 \text{ mH}$  und  $C = 1 \mu\text{F}$
- Frequenzgang soll in einem Bereich von  $\omega_{\min} = 3 \text{ krad/s}$  bis  $\omega_{\max} = 300 \text{ krad/s}$  an 10 Punkten gemessen werden
- Für die logarithmische Teilung der Frequenzachse wird der Logarithmus der Grenzen des Frequenzbereichs gebildet

$$l_{\min} = \log(3 \cdot 10^3) = 3.4771$$

$$l_{\max} = \log(3 \cdot 10^5) = 5.4771$$

- Zwischen diese Werte werden 8 Punkte gelegt, die äquidistante Abstände zueinander haben



# Frequenzgang von Systemen

Beispiel: Messung des Frequenzgangs

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$I_n$	3.477	3.699	3.922	4.144	4.366	4.588	4.810	5.033	5.255	5.477
$\omega_n = 10^{I_n} / \text{krad/s}$	3	5.004	8.347	13.924	23.227	38.745	64.630	107.80	179.83	300
$U_{En} / \text{V}$	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
$U_{An} / \text{V}$	1.007	1.019	1.055	1.163	1.471	1.012	0.284	0.091	0.031	0.011
$A_n = U_{An}/U_{En}$	1.007	1.019	1.055	1.163	1.471	1.012	0.284	0.091	0.031	0.011
$a_n = 20 \cdot \log(A_n)$	0.060	0.168	0.471	1.317	3.354	0.110	- 10.90	- 20.82	- 30.07	- 39.09
$\Delta t_n / \mu\text{s}$	- 21.89	- 22.19	- 23.08	- 25.83	- 36.02	- 54.73	- 42.24	- 27.14	- 16.78	- 10.23
$\varphi_n = \omega_n \cdot \Delta t_n$	-0.065	-0.111	-0.192	-0.359	-0.836	-2.120	-2.730	-2.926	-3.018	-3.069



# Frequenzgang von Systemen

## Beispiel: Messung des Frequenzgangs

- Messergebnis als Bode-Diagramm
- Wegen logarithmischer Skalierung der Stützstellen  $\omega_n$  erscheinen die Punkte im Bode-Diagramm äquidistant
- Dadurch kann bereits mit einer geringen Zahl von Messpunkten ein aussagekräftiges Diagramm erzeugt werden
- Verbindung der Messwerte führt zur Approximation des Frequenzgangs
- Vorgehen zeigt, dass die Phase eines Systems bei harmonischer Anregung einer Zeitverschiebung zwischen Ein- und Ausgangssignal entspricht

