Hochschule Karlsruhe
Technik und Wirtschaft
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES
Näher dran.

EIT Fakultät für Elektro- und Informationstechnik

Systemtheorie

Vorlesung 23: Zielsetzung für den Filterentwurf

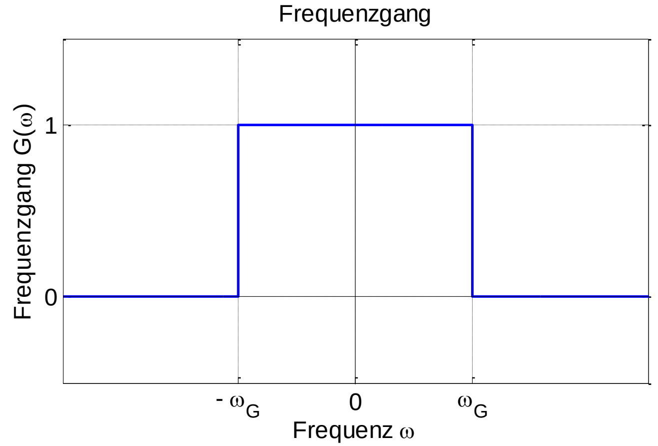
Fakultät für Elektro- und Informationstechnik, Manfred Strohrmann

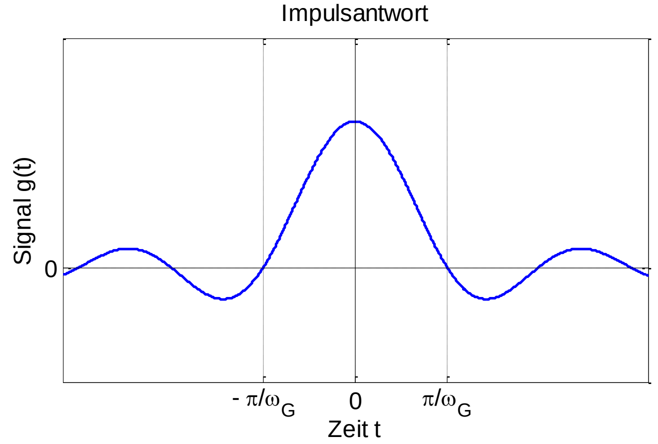
Zielsetzung für den Filterentwurf

Ideales Tiefpass-Filter

- Ideale Filter können nicht realisiert werden, reale Filter nähern die ideale Charakteristik an
- Es müssen Randbedingungen an den Amplituden- und Phasengang gestellt werden
- Ein ideales Tiefpass-Filter lässt Signale mit Spektralanteilen bis zu einer definierten Grenzfrequenz ω_G ungedämpft passieren und unterdrückt Spektralanteile oberhalb dieser Grenzfrequenz vollständig
- Phasengang des Filters ist idealerweise $\varphi(\omega) = 0$
- Es ergibt sich der reelle Frequenzgang

$$G(\omega) = \sigma(\omega + \omega_G) - \sigma(\omega - \omega_G)$$





Zielsetzung für den Filterentwurf

Ideales Tiefpass-Filter

- Impulsantwort des idealen Tiefpass-Filters

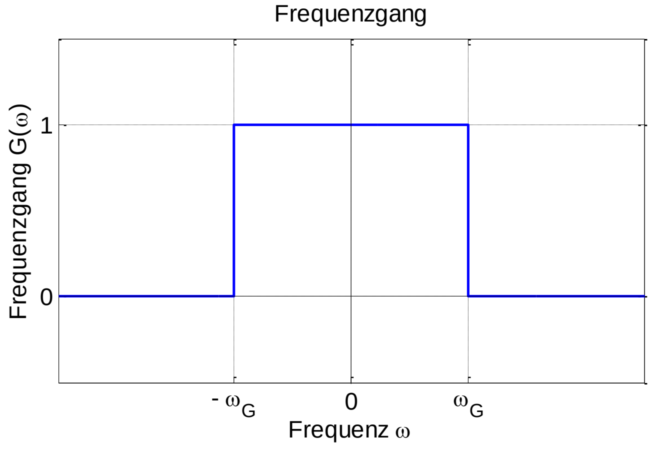
$$g(t) = \frac{\omega_G}{\pi} \cdot \frac{\sin(\omega_G \cdot t)}{\omega_G \cdot t}$$

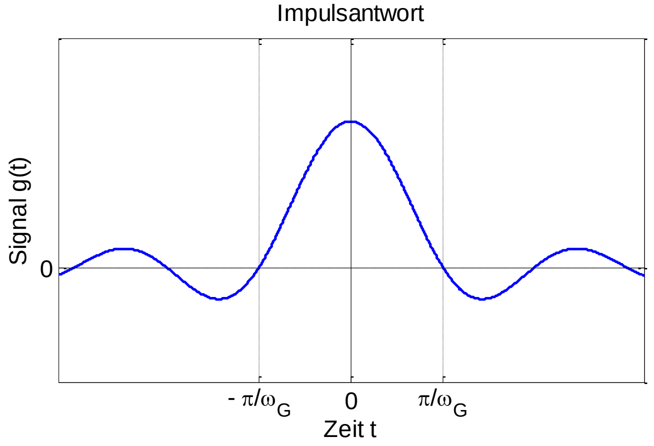
  ist nicht kausal, Filter kann so nicht realisiert werden

- Logarithmischer Amplitudengang realisierbarer Filter hat eine endliche Steilheit von – 20 dB pro Dekade oder einem Vielfachen davon

- Unendliche Steilheit würde eine unendlich hohe Filterordnung erfordern

- Ideale Filter können nicht realisiert werden, reale Filter können die ideale Charakteristik nur annähern





Zielsetzung für den Filterentwurf

Definition des Amplitudengangs eines Filters über ein Toleranzschema

- Ordnung N eines Systems wird allgemein durch die Anzahl linear unabhängiger Energiespeicher festgelegt, mit steigender Filterordnung N steigt neben der Steilheit des Filters deshalb auch der Implementierungsaufwand
- Kostengünstige Filter haben eine Filterordnung, die eine gerade ausreichende Steilheit besitzt, zur Bewertung muss eine Spezifikation für den Filter erstellt werden
- Filter werden eingesetzt, um Störungen und Rauschen in Signalen zu unterdrücken, Rauschsignale werden im Spektralbereich über ihre Leistungsdichte $|U(\omega)|^2$ beschrieben
- Mit den Rechenregeln zur Fourier-Transformation ergibt sich für die Leistungsdichte des Ausgangssignals

$$\left|Y(\omega)\right|^2 = \left|G(\omega)\right|^2 \cdot \left|U(\omega)\right|^2$$

- Zusammenhang zwischen den Rauschleistungsdichten am Ein- und Ausgang des Filters wird über die Leistungsübertragungsfunktion $|G(\omega)|^2$ beschrieben, die spezifiziert werden muss

Zielsetzung für den Filterentwurf

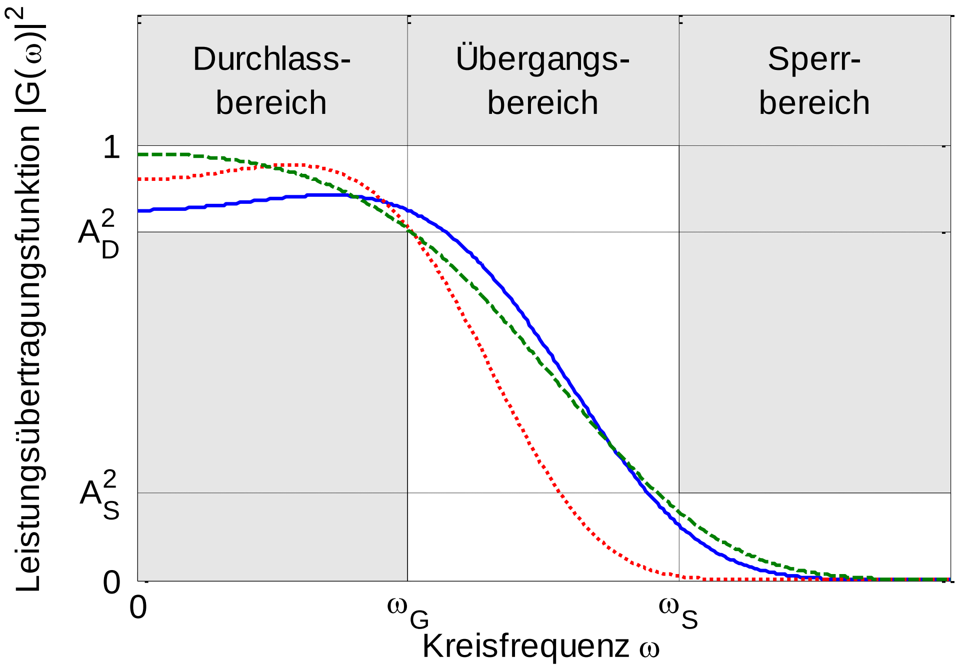
Definition des Amplitudengangs eines Filters über ein Toleranzschema

- Toleranzschema für die Leistungsübertragungsfunktion, sie muss in den hellen Bereichen liegen
- Im Durchlassbereich $0 < \omega \leq \omega_G$ gilt die Bedingung

$$A_D^2 \leq \left|G(\omega)\right|^2 \leq 1$$

- Übergangsbereich liegt zwischen Durchlass- und Sperrbereich ($\omega_G < \omega \leq \omega_S$)
- Anforderung an die Leistungsübertragungsfunktion im Sperrbereich $\omega > \omega_S$

$$\left|G(\omega)\right|^2 \leq A_S^2$$



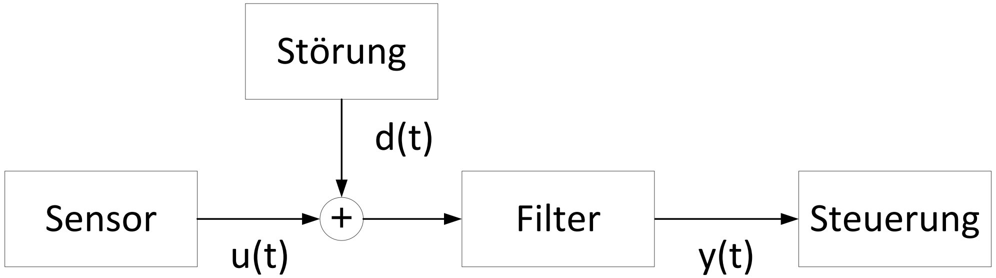
Zielsetzung für den Filterentwurf

Beispiel: Definition des Amplitudengangs eines Filters über ein Toleranzschema

- Sensor wird über eine analoge Schnittstelle mit einer Steuerung verbunden
- Er weist eine Grenzfrequenz von ω_G = 100 rad/s auf
- In das Kabel wird eine Störung eingekoppelt

$$d(t) = 1\,V \cdot \cos(2500\ rad/s \cdot t)$$

- Signal soll so gefiltert werden, dass Amplituden im Frequenzbereich bis zur Grenzfrequenz ω_G maximal um 5 % verfälscht werden
- Außerdem soll die Amplitude der Störung auf 5 % abgesenkt werden



ω	$A(\omega)$	$\|G(\omega)\|^2$
$\omega = 0$	1	1
$\omega_G = 100\ rad/s$	$A_D = 0.95$	$\|G(\omega_G)\|^2 = 0.9025$
$\omega_S = 2500\ rad/s$	$A_S = 0.05$	$\|G(\omega_S)\|^2 = 0.0025$

Zielsetzung für den Filterentwurf

Forderungen an den Phasengang eines Filters – Totzeitglied

- Totzeitglied ist ein Filter, das Signale zeitlich verschiebt, Signale in ihrer Form jedoch nicht verändert
- Verschiebung eines Signals um die Zeit t_0 führt zu der Fourier-Transformierten

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\left(t-t_0\right)\cdot e^{-j\cdot\omega\cdot t}\,dt = e^{-j\cdot\omega\cdot t_0}\cdot X\left(\omega\right)$$

- Betrag des Spektrums ändert sich nicht, Phasenänderung um

$$\varphi\left(\omega\right) = -\omega\cdot t_0$$

- Phase fällt linear mit der Kreisfrequenz ω und der Steigung - t_0
- Totzeitglied ist das einfachste Beispiel für ein verzerrungsfreies System mit linearem Phasengang

Zielsetzung für den Filterentwurf

Forderungen an den Phasengang eines Filters – Amplituden- und Phasenverzerrung

- Um die Verzerrungen, die von Filtern hervorgerufen werden, besser verstehen zu können, werden Amplituden- und Phasenverzerrungen getrennt diskutiert
- Beispiel für ein periodisches Rechtecksignal, das mit einem RC-Tiefpass der Übertragungsfunktion

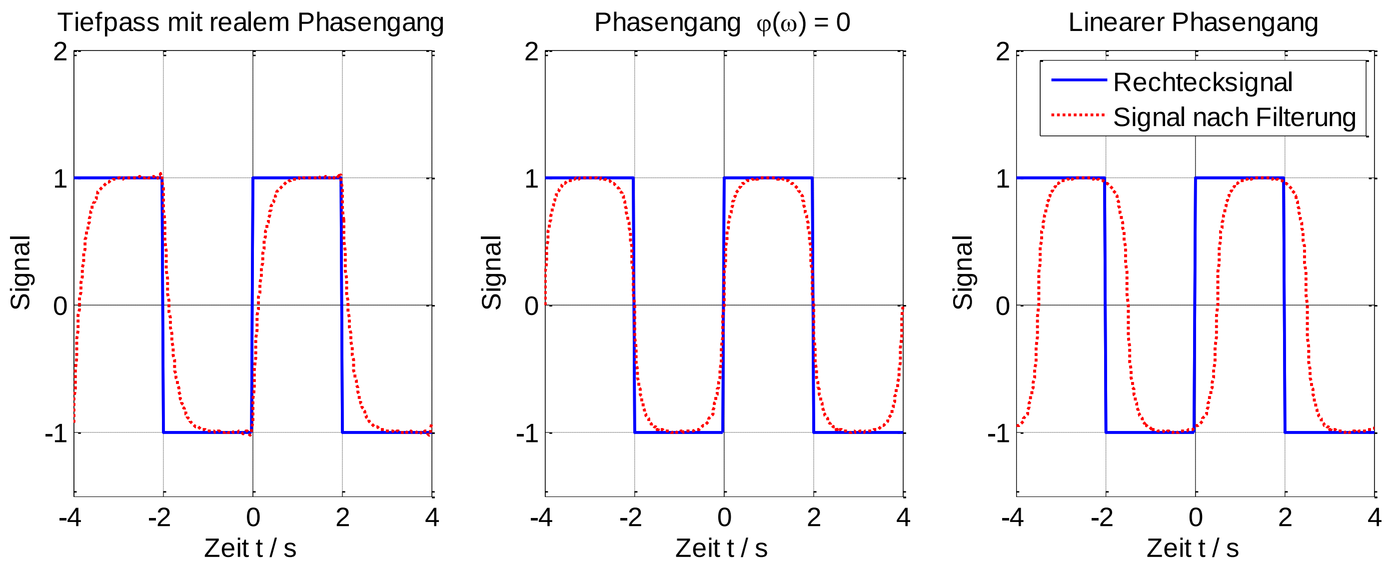
$$G(\omega) = \frac{1}{1 + j \cdot \omega \cdot T} = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 \cdot T^2}} \cdot e^{-j \cdot \arctan(\omega \cdot T)}$$

  und einer Zeitkonstante T = 0.2 s gefiltert wird

- Vergleich folgender Varianten:
  - Realer Phasengang eines RC-Tiefpasses mit T = 0.2 s
  - Phasengang rechnerisch zu null gesetzt $\varphi(\omega) = 0$
  - Linearer Phasengang $\varphi(\omega) = -\omega \cdot t_0$ mit $t_0 = 0.5$ s

Zielsetzung für den Filterentwurf

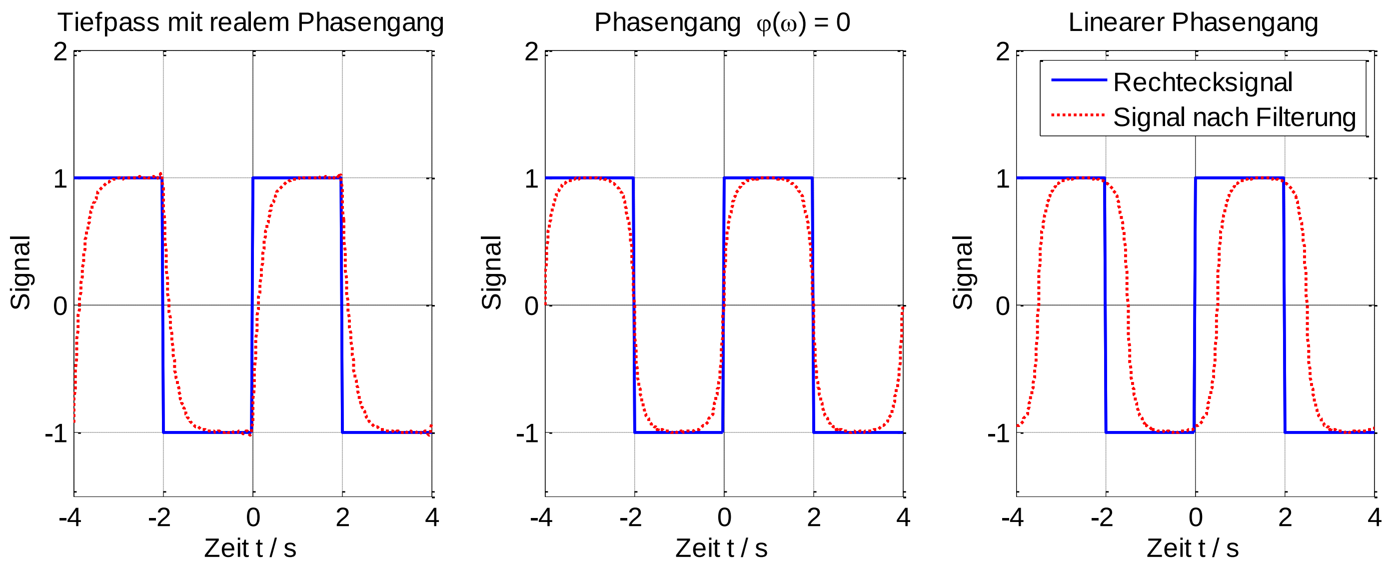
Forderungen an den Phasengang eines Filters – Amplituden- und Phasenverzerrung



- Wird der Phasengang rechnerisch zu null gesetzt, ergibt sich das in der Mitte gezeigte Signal
- Durch die Filterung sind die Flanken nicht mehr so steil wie vor dem Filter, aber die Symmetrie des Rechtecks bleibt erhalten
- Da der Phasengang des Filters zu null gesetzt ist, ergibt sich die in der Mitte gezeigte Verzerrung ausschließlich aus dem Amplitudengang des Filters

Zielsetzung für den Filterentwurf

Forderungen an den Phasengang eines Filters – Amplituden- und Phasenverzerrung



- Rechts ist der Phasengang rechnerisch durch einen linearen Phasengang ersetzt worden: $\varphi(\omega) = -\omega \cdot t_0$
- Das Signal ist um die Zeit t_0 = 0.5 s verzögert, die Verzerrungen entsprechen ansonsten den in der Mitte gezeigten Verzerrungen
- Diese Vorüberlegungen zeigen, dass die Signalverzerrungen durch den Phasengang dann minimal sind, wenn die Phase null ist oder linear fällt

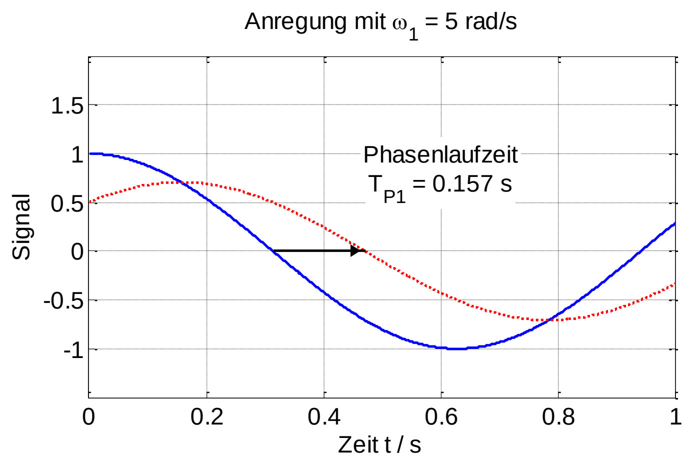
Zielsetzung für den Filterentwurf

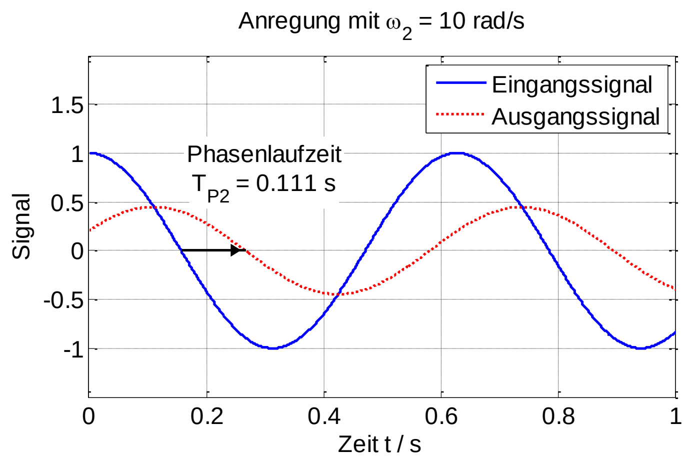
Forderungen an den Phasengang eines Filters – Phasenlaufzeit

- Phasenlaufzeit T_P entspricht der zeitlichen Verschiebung zwischen Eingangs- und Ausgangssignal bei Anregung mit einer harmonischen Schwingung der Frequenz ω
- Sie kann aus dem Phasengang $\varphi(\omega)$ berechnet werden zu

$$T_P(\omega) = -\frac{\varphi(\omega)}{\omega}$$

- Phasenlaufzeit T_P ist im Allgemeinen von der Frequenz abhängig, Beispiel RC-Tiefpass mit T = 0.2 s und unterschiedlichen Anregungs-frequenzen





Zielsetzung für den Filterentwurf

Forderungen an den Phasengang eines Filters – Phasenlaufzeit

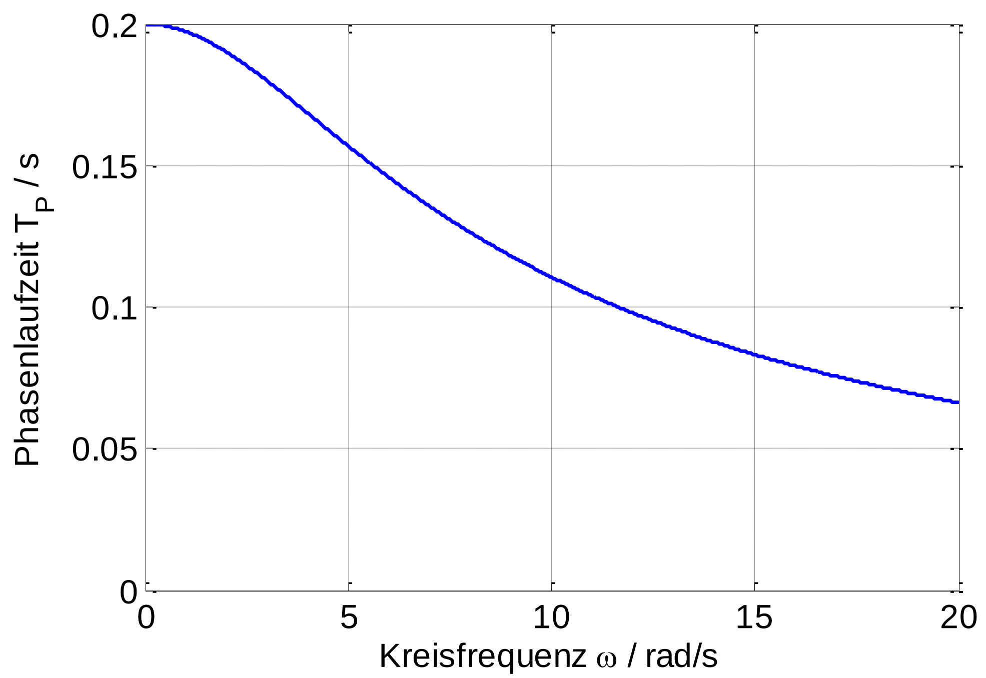
- Phasenlaufzeit T_P ist im Allgemeinen von der Frequenz abhängig
- Bei Systemen mit linearem Phasengang

  $$\varphi(\omega) = -\omega \cdot t_0$$

  berechnet sich die Phasenlaufzeit zu

  $$T_P(\omega) = -\frac{\varphi(\omega)}{\omega} = -\frac{-\omega \cdot t_0}{\omega} = t_0$$

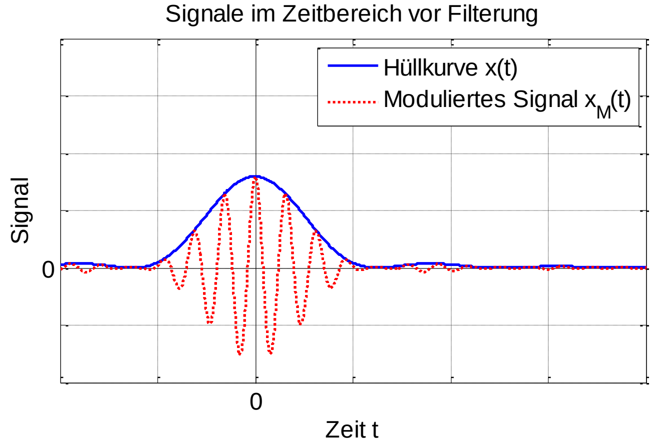
- Bei Systemen mit linearer Phase entspricht die Phasenlaufzeit T_P der zeitlichen Verschiebung t_0 zwischen beliebigen Eingangs- und Ausgangssignalen
- Die Form der Signale bleibt bei Systemen mit linearer Phase unverändert

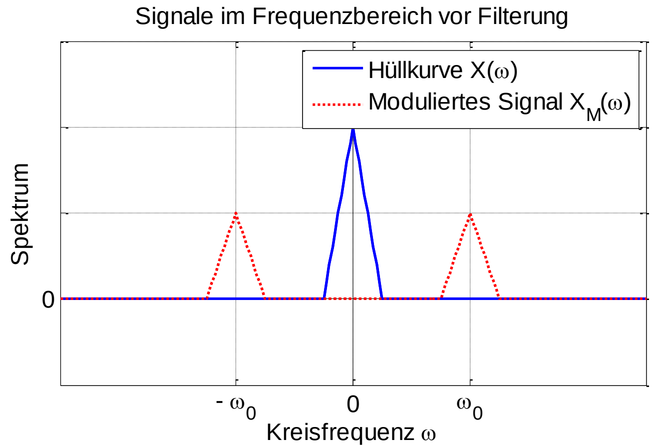


Zielsetzung für den Filterentwurf

Forderungen an den Phasengang eines Filters – Gruppenlaufzeitlaufzeit

- Phasenlaufzeit bietet eine anschauliche Interpretation des Phasengangs bei einer harmonischen Anregung des Filters
- Reale Signale erstrecken sich typischerweise jedoch über einen Frequenzbereich, sodass das Modell zur Interpretation des Phasengangs erweitert werden muss
- Zur Bewertung des Verhaltens eines Signals, das aus verschiedenen Spektralanteilen besteht, wird die sogenannte Gruppenlaufzeit T_G eingeführt
- Spektrum und zeitlicher Signalverlauf eines bandbegrenzten Signals





Zielsetzung für den Filterentwurf

Forderungen an den Phasengang eines Filters – Gruppenlaufzeitlaufzeit

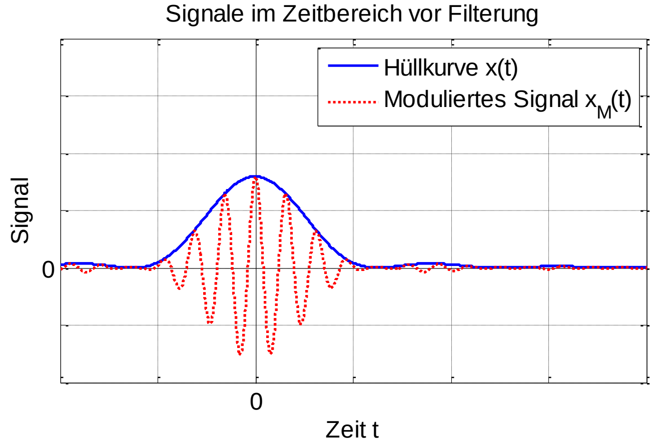
- Spektrum $X(\omega)$ ist nur in dem Frequenzbereich $-\omega_G \leq \omega \leq \omega_G$ von null verschieden
- Das korrespondierende Signal x(t) wird mit einer Kosinusfunktion moduliert

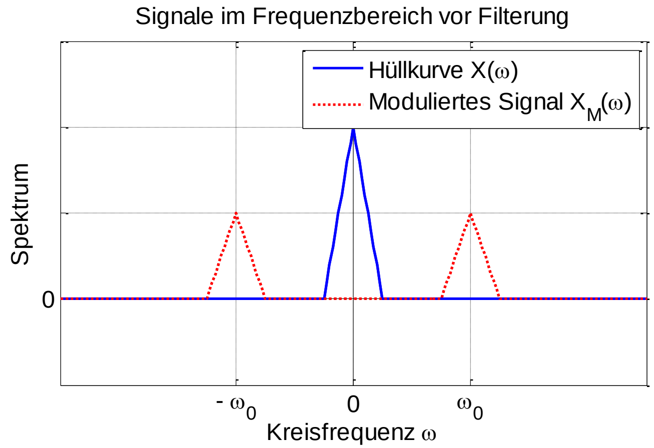
$$x_M(t) = \cos(\omega_0 \cdot t) \cdot x(t) = \frac{1}{2} \cdot \left(e^{j \cdot \omega_0 \cdot t} + e^{-j \cdot \omega_0 \cdot t}\right) \cdot x(t)$$

- Spektrum wird an die Modulationsfrequenz $\pm\,\omega_0$ verschoben

$$X_M(\omega) = \frac{1}{2} \cdot \left(X(\omega + \omega_0) + X(\omega - \omega_0)\right)$$

- Spektrum des modulierten Signals ist in einem Frequenzintervall von $\omega_0 - \omega_G \leq |\omega| \leq \omega_0 + \omega_G$ von null verschieden





Zielsetzung für den Filterentwurf

Forderungen an den Phasengang eines Filters – Gruppenlaufzeitlaufzeit

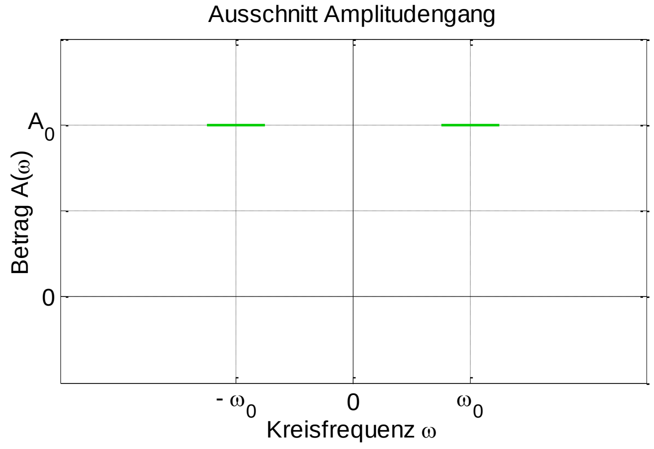
- Moduliertes Signal wird mit einem Filter gefiltert, das in diesem Frequenzintervall einen linearen Phasengang aufweist
- Er wird als Geradengleichung mit den zunächst unbekannten Parametern T_G und φ_0 angesetzt, für $\omega > 0$ gilt:

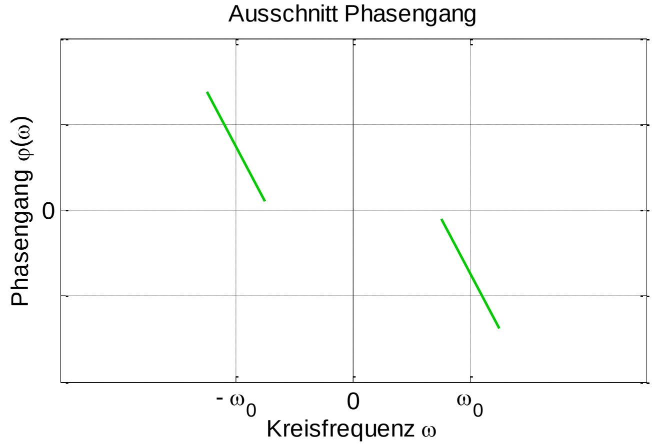
$$\varphi(\omega) = -T_G \cdot \omega - \varphi_0$$

- Aufgrund der Punktsymmetrie des Phasengangs reeller Systeme gilt für $\omega < 0$:

$$\varphi(\omega) = -T_G \cdot \omega + \varphi_0$$

- Konstanter Amplitudengang in diesem Frequenzbereich $A(\omega) = A_0$





Zielsetzung für den Filterentwurf

Forderungen an den Phasengang eines Filters – Gruppenlaufzeitlaufzeit

- Das gefilterte Signal berechnet sich im Frequenzbereich zu

$$Y(\omega) = A_0 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(X(\omega + \omega_0) \cdot e^{j\cdot(-T_G \cdot \omega + \varphi_0)} + X(\omega - \omega_0) \cdot e^{j\cdot(-T_G \cdot \omega - \varphi_0)} \right) = A_0 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(X(\omega + \omega_0) \cdot e^{j\cdot\varphi_0} + X(\omega - \omega_0) \cdot e^{-j\cdot\varphi_0} \right) \cdot e^{-j\cdot T_G \cdot \omega}$$

- Zur Rücktransformation in den Zeitbereich wird der Ausdruck mit den Rechenregeln der Fourier-Transformation interpretiert. Für die innere Klammer gilt:

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{ X(\omega + \omega_0) \cdot e^{j\cdot\varphi_0} + X(\omega - \omega_0) \cdot e^{-j\cdot\varphi_0} \right\} = x(t) \cdot \left(e^{-j\cdot\omega_0\cdot t} \cdot e^{j\cdot\varphi_0} + e^{j\cdot\omega_0\cdot t} \cdot e^{-j\cdot\varphi_0} \right)$$

$$= x(t) \cdot \left(e^{-j\cdot(\omega_0\cdot t - \varphi_0)} + e^{j\cdot(\omega_0\cdot t - \varphi_0)} \right) = 2 \cdot x(t) \cdot \cos(\omega_0 \cdot t - \varphi_0)$$

- Exponentialfunktion entspricht im Zeitbereich einer Zeitverschiebung, damit ergibt sich

$$y(t) = A_0 \cdot \cos(\omega_0 \cdot (t - T_G) - \varphi_0) \cdot x(t - T_G)$$

Zielsetzung für den Filterentwurf

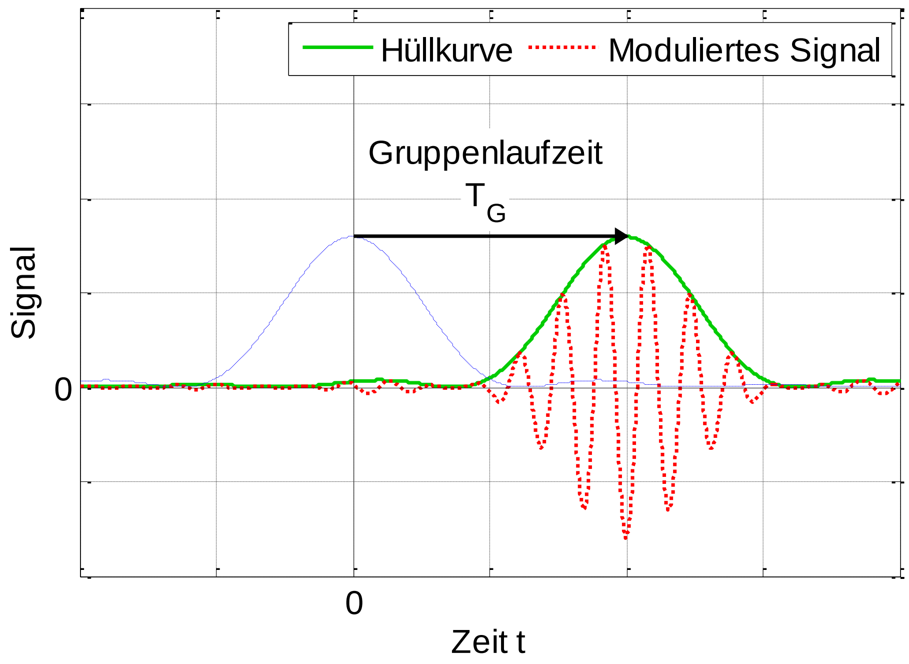
Forderungen an den Phasengang eines Filters – Gruppenlaufzeitlaufzeit

- Harmonische Schwingung weist eine Phasenverschiebung φ_0 auf
- Außerdem ist das Signal gegenüber dem Eingangssignal $x_M(t)$ um die Zeit T_G verschoben
- Zeit T_G entspricht der Steigung im linearen Phasengang

$$\varphi(\omega) = -T_G \cdot \omega - \varphi_0$$

und wird als Gruppenlaufzeit bezeichnet

$$T_G(\omega) = -\frac{d\varphi}{d\omega}$$



Zielsetzung für den Filterentwurf

Forderungen an den Phasengang eines Filters – Gruppenlaufzeitlaufzeit

- Eine konstante Gruppenlaufzeit über alle Frequenzen ergibt sich nur dann, wenn die Ableitung des Phasengangs konstant ist
- Dieser Fall entspricht einem linearen Phasengang, der durch den Koordinatenursprung verläuft, derartige Systeme werden als linearphasige Systeme bezeichnet
- Bei linearphasigen Systemen entspricht die Gruppenlaufzeit der zeitlichen Verschiebung t_0 des Signals und damit der Phasenlaufzeit T_P

$$T_G(\omega) = -\frac{d\varphi}{d\omega} = t_0 = -\frac{\varphi(\omega)}{\omega} = T_P(\omega)$$

- Ziel der Filterentwicklung ist es, Systeme mit geringer Phasenverzerrung und damit einem linearen Phasengang zu entwickeln. Nach diesen Vorüberlegungen müssen sie eine konstante Gruppenlaufzeit aufweisen. Diese Forderung kann von realen Filtern jedoch nicht erfüllt werden und wird deshalb abgeschwächt. Die Gruppenlaufzeit soll im Durchlassbereich des Filters konstant sein.

Zielsetzung für den Filterentwurf

Zusammenfassung

Kriterium	Zeitbereich	Frequenzbereich
Idealer Filter	Nicht realisierbar wegen unendlich langer, nicht kausaler Impulsantwort g(t)	Nicht realisierbar wegen unendlich hoher Steilheit und damit unendlich hoher Filterordnung N
Forderung Amplitudengang	Dämpfung der Amplituden von Signalen in definierten Frequenzbereichen	Beschreibung von Toleranzgrenzen für die Leistungsübertragungsfunktion $\|G(\omega)\|^2$
Forderung Phasengang	Geringe Phasenverzerrung, Verschiebung um Gruppenlaufzeit T_G	Linearer Phasengang im Durchlassbereich des Filters