Hochschule Karlsruhe
Technik und Wirtschaft
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES
Näher dran.

EIT Fakultät für Elektro- und Informationstechnik

Systemtheorie

Vorlesung 24: Butterworth-Filter

Fakultät für Elektro- und Informationstechnik, Manfred Strohrmann

Standardisierte Entwurfsverfahren

Übersicht

- Für den Filterentwurf stehen unterschiedliche Verfahren zur Verfügung
  - Filter mit kritischer Dämpfung
    Mehrfacher reeller Pol der Übertragungsfunktion, deshalb keine Schwingen der Sprungantwort, aber vergleichsweise flacher Übergang von Durchlass- zu Sperrbereich
  - Bessel-Filter
    Weitgehend linearer Phasengang im Durchlassbereich, dadurch wenig Phasenverzerrungen, ebenfalls flacher Übergang von Durchlass- zu Sperrbereich
  - Butterworth-Filter
    Maximal flacher Amplitudengang im Durchlassbereich, mäßig steiler Übergang von Durchlass- zu Sperrbereich, schwach schwingende Sprungantwort
  - Tschebyscheff-Filter
    Sehr steiler Übergang von Durchlass- zu Sperrbereich, hohe Phasenverzerrungen, stark schwingende Sprungantwort
- Alle Filterentwürfe werden im Skript hergeleitet und an Beispielen beschrieben,
  Vorlesung konzentriert sich auf Butterworth-Filter

Standardisierte Entwurfsverfahren

Übersicht

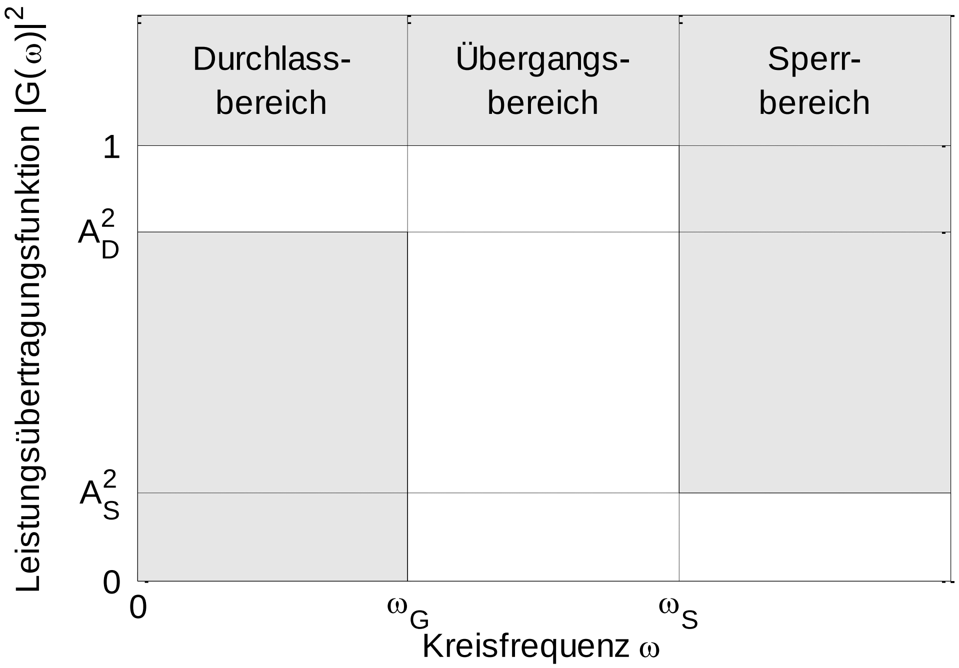
- Toleranzschema wird für die Spezifikation des Filters verwendet
- Einführen der allgemein üblichen Bezeichnungen

$$A_D^2 = \frac{1}{1+\varepsilon^2}$$

und

$$A_S^2 = \frac{1}{1+\lambda^2}$$

vereinfachen die Herleitung



Standardisierte Entwurfsverfahren

Entwurf von Butterworth-Filtern

- Benannt ist der Butterworth-Filter nach dem britischen Physiker Stephen Butterworth, der diese Art von Filter erstmals beschrieb
- Butterworth-Filter werden so konstruiert, dass der Amplitudengang monoton fällt
- Zur Herleitung wird die allgemeine Form einer Leistungsübertragungsfunktion analysiert, für Filter der Ordnung N ergibt sich die Gleichung

$$\left|G(\omega)\right|^2 = G(\omega)\cdot G^*(\omega) = \frac{1}{\sum_{n=0}^{N} a_n\cdot(j\cdot\omega)^n}\cdot\frac{1}{\sum_{n=0}^{N} a_n\cdot(-j\cdot\omega)^n} = \frac{1}{\sum_{n=0}^{2\cdot N} e_n\cdot(j\cdot\omega)^n}$$

- Leistungsübertragungsfunktion fällt monoton, wenn die Leistungsübertragungsfunktion ausschließlich an der Stelle $\omega = 0$ einen Extremwert aufweist.
- Um dies sicherzustellen, werden die Extremwerte der Leistungsübertragungsfunktion bestimmt, sie liegen an den Stellen, an denen die erste Ableitung der Leistungsübertragungsfunktion zu null wird

Standardisierte Entwurfsverfahren

Entwurf von Butterworth-Filtern

- Mit der Quotientenregel ergibt sich

$$\frac{d}{d\omega}\left|G(\omega)\right|^2 = -\frac{j\cdot\sum_{n=1}^{2\cdot N} n\cdot e_n\cdot(j\cdot\omega)^{n-1}}{\left(\sum_{n=0}^{2\cdot N} e_n\cdot(j\cdot\omega)^n\right)^2} = 0$$

- Existiert nur der Summand mit der höchsten Potenz von $j\cdot\omega$, errechnen sich die Extremwerte über die Gleichung

$$j\cdot 2\cdot N\cdot e_{2\cdot N}\cdot(j\cdot\omega)^{2\cdot N-1} = 0$$

  Sie hat ausschließlich die Lösung $\omega = 0$

- Für diesen Fall liegt nur an der Stelle $\omega = 0$ ein Extremwert vor, andere Extremwerte existieren nicht. Die Forderung an den Butterworth-Filter wird erfüllt, wenn alle Koeffizienten e_n für $n \neq 0$ und $n \neq 2\cdot N$ verschwinden

Standardisierte Entwurfsverfahren

Entwurf von Butterworth-Filtern

- Um bei der Frequenz $\omega = 0$ und bei der Grenzfrequenz ω_G das Toleranzschema zu erfüllen, ergibt sich die Leistungsübertragungsfunktion für einen Butterworth-Filter zu

$$\left|G(\omega)\right|^2 = \frac{1}{e_0 + e_{2\cdot N} \cdot (j \cdot \omega)^{2\cdot N}} = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 \cdot \left(\frac{\omega}{\omega_G}\right)^{2\cdot N}}$$

- Parameter ε und ω_G ergeben sich direkt aus dem Toleranzschema
- Ordnung N berechnet sich aus der Forderung an der Sperrfrequenz ω_S

$$\left|G(\omega_S)\right|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 \cdot \left(\frac{\omega_S}{\omega_G}\right)^{2\cdot N}} \le \frac{1}{1 + \lambda^2}$$

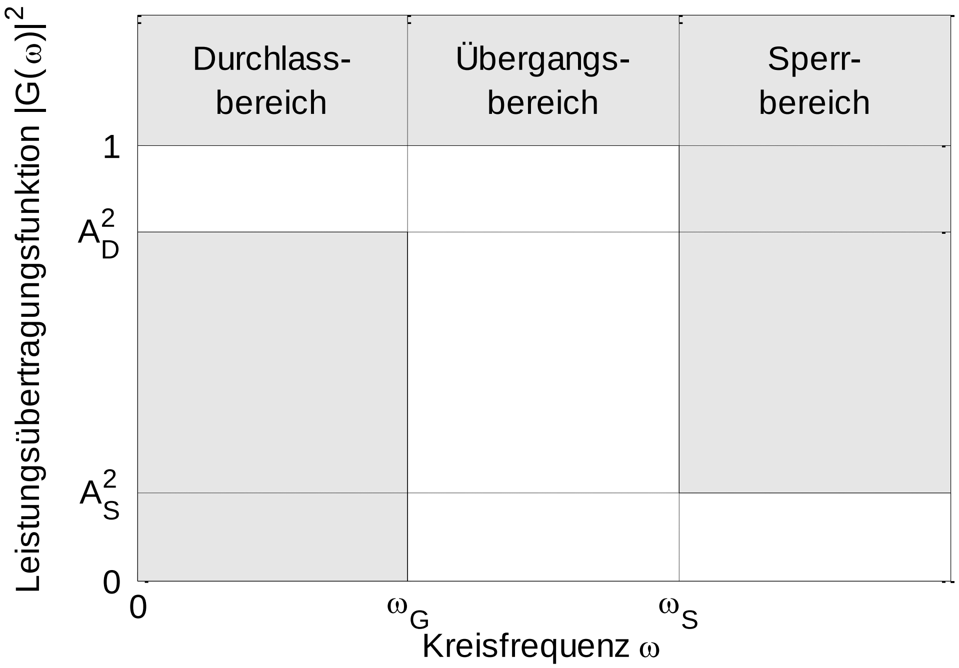
Standardisierte Entwurfsverfahren

Entwurf von Butterworth-Filtern

- Auflösen der Ungleichung nach N führt zu der Ordnung N des Butterworth-Filters

$$N \geq \frac{\log\left(\frac{\lambda}{\varepsilon}\right)}{\log\left(\frac{\omega_S}{\omega_G}\right)}$$

- Wachsende Steilheit des Filters bedeutet, dass ω_S näher an ω_G liegt oder dass $1/(1+\varepsilon^2)$ weiter weg von $1/(1+\lambda^2)$ liegt, in beiden Fällen steigt die Ordnung des Butterworth-Filters



$$A_D^2 = \frac{1}{1+\varepsilon^2} \qquad A_S^2 = \frac{1}{1+\lambda^2}$$

Standardisierte Entwurfsverfahren

Entwurf von Butterworth-Filtern – Berechnen der Übertragungsfunktion

- Bei bekannter Filterordnung des Filters können die Pole der Leistungsübertragungsfunktion in der s-Ebene bestimmt werden, dazu wird die Gleichung vom Fourier-Bereich in den Laplace-Bereich transformiert, indem ω = s/j substituiert wird
- Für die Pole der Leistungsübertragungsfunktion folgt

$$\varepsilon^2 \cdot \left(-\frac{s_n^2}{\omega_G^2} \right)^N + 1 = 0$$

beziehungsweise

$$\frac{\alpha_n^2}{\omega_G^2} = -\sqrt[N]{-\frac{1}{\varepsilon^2}} = \varepsilon^{-\frac{2}{N}} \cdot e^{j\cdot\pi} \cdot e^{j\cdot\pi\cdot\frac{2\cdot n-1}{N}} = \varepsilon^{-\frac{2}{N}} \cdot e^{j\cdot\pi\cdot\frac{N+2\cdot n-1}{N}}$$

Die Pole der Leistungsübertragungsfunktion liegen mit n = 1, 2, ..., 2·N an den Stellen

$$\alpha_n = \omega_G \cdot \varepsilon^{-\frac{1}{N}} \cdot e^{j\cdot\pi\cdot\frac{2\cdot n+N-1}{2\cdot N}}$$

Standardisierte Entwurfsverfahren

Entwurf von Butterworth-Filtern – Berechnen der Übertragungsfunktion

- Zum Beispiel ergeben sich für N = 4 die Pollagen

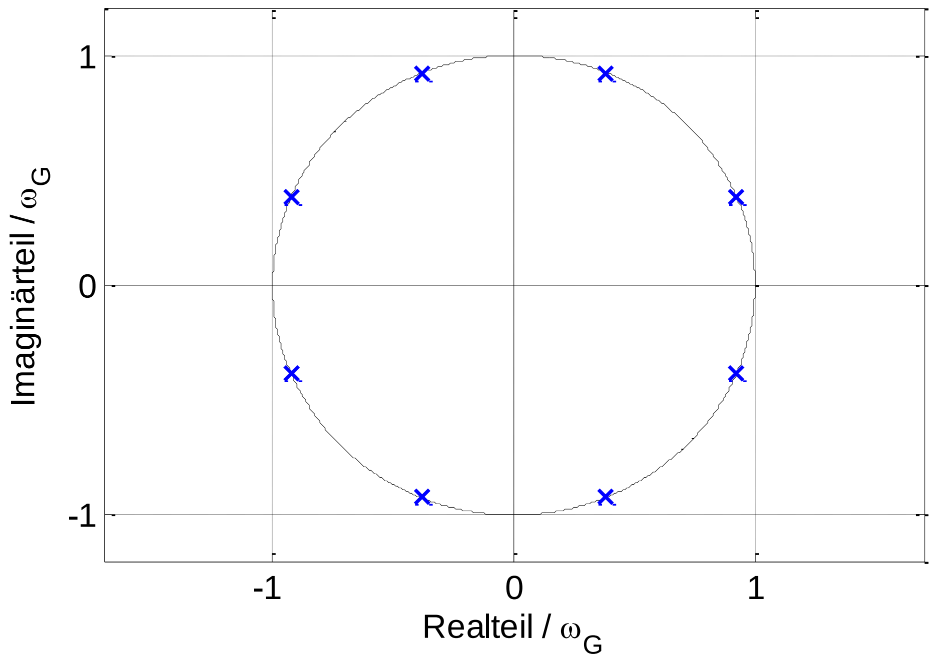
$$\alpha_n = \omega_G \cdot \varepsilon^{-\frac{1}{4}} \cdot e^{j\cdot\pi\cdot\frac{2\cdot n+4-1}{2\cdot 4}} = \omega_G \cdot \varepsilon^{-\frac{1}{4}} \cdot e^{j\cdot\pi\cdot\left(\frac{n}{4}+\frac{3}{8}\right)}$$

- Die Pole haben vom Ursprung einen konstanten Abstand von

$$\left|\alpha_n\right| = \omega_G \cdot \varepsilon^{-\frac{1}{4}}$$

  und untereinander eine um $\pi/4$ versetzte Phasenlage

- Erster Pol hat eine Phase von $5\cdot\pi/8$



Standardisierte Entwurfsverfahren

Entwurf von Butterworth-Filtern – Berechnen der Übertragungsfunktion

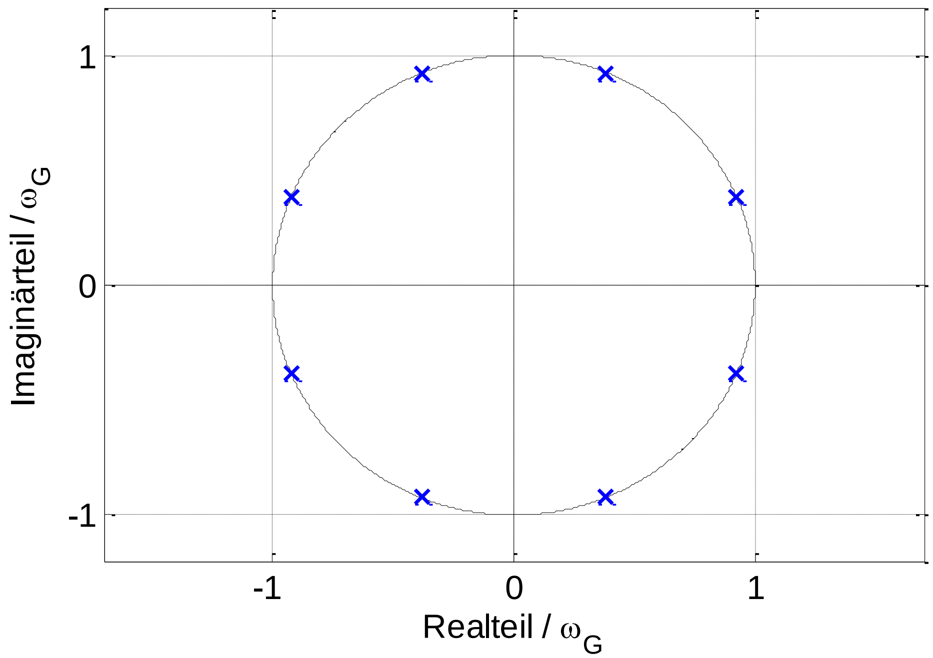
- Aufgrund der Symmetrie der Pollagen gilt für den Butterworth-Filter:

$$\left|G(s)\right|^2 = G(s) \cdot G(-s)$$

- Für die Realisierung können deshalb die Pole in der linken Halbebene mit n = 1, 2, ..., N verwendet werden

$$\alpha_n = \omega_G \cdot \varepsilon^{-\frac{1}{N}} \cdot e^{j \cdot \pi \cdot \frac{2 \cdot n + N - 1}{2 \cdot N}}$$

- Aus der Forderung, eine stationäre Verstärkung von G(0) = 1 zu erreichen, ergibt sich die Übertragungsfunktion mit den Polen $s_1 \ldots s_N$



$$G(s) = \frac{(-s_1) \cdot (-s_2) \cdots (-s_N)}{(s - s_1) \cdot (s - s_2) \cdots (s - s_N)} = \frac{(-1)^N \cdot s_1 \cdot s_2 \cdots s_N}{(s - s_1) \cdot (s - s_2) \cdots (s - s_N)}$$

Standardisierte Entwurfsverfahren

Entwurf von Butterworth-Filtern – Berechnen der Übertragungsfunktion

- Alternativ kann das Produkt aus Linearfaktoren im Nenner in ein Polynom überführt werden

$$G(s) = \frac{(-\alpha_1)\cdot(-\alpha_2)\cdots(-\alpha_N)}{(s-\alpha_1)\cdot(s-\alpha_2)\cdots(s-\alpha_N)} = \frac{1}{\left(1-\frac{s}{\alpha_1}\right)\cdot\left(1-\frac{s}{\alpha_2}\right)\cdots\left(1-\frac{s}{\alpha_N}\right)}$$

$$= \frac{1}{\left(1-\frac{s\cdot\varepsilon^{\frac{1}{N}}}{\omega_G}\cdot e^{-j\cdot\pi\cdot\frac{1+N}{2\cdot N}}\right)\cdot\left(1-\frac{s\cdot\varepsilon^{\frac{1}{N}}}{\omega_G}\cdot e^{-j\cdot\pi\cdot\frac{3+N}{2\cdot N}}\right)\cdots\left(1-\frac{s\cdot\varepsilon^{\frac{1}{N}}}{\omega_G}\cdot e^{-j\cdot\pi\cdot\frac{3\cdot N-1}{2\cdot N}}\right)} = \frac{1}{\sum_{n=0}^{N} a_n\cdot\left(\frac{s\cdot\varepsilon^{\frac{1}{N}}}{\omega_G}\right)^n}$$

- Die Koeffizienten a_n dieses Polynoms sind unabhängig von der Grenzfrequenz ω_G und dem Parameter ε, sie hängen nur von der Ordnung N des Filters ab, deshalb können sie standardisiert werden, mit dem Ausdruck p ergeben sich standardisierte Butterworth-Polynome
- Da die Pole entweder reell oder konjugiert komplex sind, kann der Nenner in lineare und quadratische Faktoren zerlegt werden, es wird sich zeigen, dass diese Darstellungsform ein geeigneter Ausgangspunkt für die Realisierung von analogen Filterschaltungen ist

Standardisierte Entwurfsverfahren

Entwurf von Butterworth-Filtern – Standardisierte Butterworth-Polynome

Ordnung N	Übertragungsfunktion
1	$\frac{1}{p+1}$
2	$\frac{1}{p^2+\sqrt{2}\cdot p+1}$
3	$\frac{1}{(p+1)\cdot\left(p^2+p+1\right)}$
4	$\frac{1}{\left(p^2+\sqrt{2-\sqrt{2}}\cdot p+1\right)\cdot\left(p^2+\sqrt{2+\sqrt{2}}\cdot p+1\right)}$

Standardisierte Entwurfsverfahren

Entwurf von Butterworth-Filtern – Zusammenfassung

- Durch die tabellierte Zusammenstellung der Butterworth-Polynome mit

$$p = \frac{s \cdot \varepsilon^{\frac{1}{N}}}{\omega_G}$$

  reduziert sich der Entwurf auf die hier zusammengefassten drei Entwicklungsschritte

- Auf die Realisierung des Filters wird später eingegangen.

Schritt	Beschreibung
1	Festlegen des Toleranzschemas mit den Parametern ε, λ, ω_G und ω_S
2	Berechnung der Filterordnung N $N \geq \frac{\log\left(\frac{\lambda}{\varepsilon}\right)}{\log\left(\frac{\omega_S}{\omega_G}\right)}$
3	Auswahl der standardisierten Übertragungsfunktion

Standardisierte Entwurfsverfahren

Beispiel: Entwurf von Butterworth-Filtern

- Es wird ein Butterworth-Filter entwickelt, das eine 3-dB-Grenzfrequenz von ω_G = 20 krad/s besitzt. Es soll einen Sperrbereich aufweisen, der bei ω_S = 55 krad/s beginnt und eine Dämpfung von a_S = - 20 dB besitzt.
- Aus den Forderung für den Durchlassbereich ergibt sich mit $A_D^2 = 1/2$ für ε der Wert

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{1}{A_D^2} - 1} = \sqrt{2-1} = 1$$

- Aus diesen Forderungen für den Sperrbereich ergibt sich mit $A_S^2 = 1/100$ für λ der Wert

$$\lambda = \sqrt{\frac{1}{A_S^2} - 1} = \sqrt{100-1} \approx 10$$

Standardisierte Entwurfsverfahren

Beispiel: Entwurf von Butterworth-Filtern

- Mit ω_G = 20 krad/s und ω_S = 55 krad/s sowie ε = 1 und λ = 10 ergibt sich eine Filterordnung von

$$N \geq \frac{\log\left(\frac{10}{1}\right)}{\log\left(\frac{55}{20}\right)} = 2.2762$$

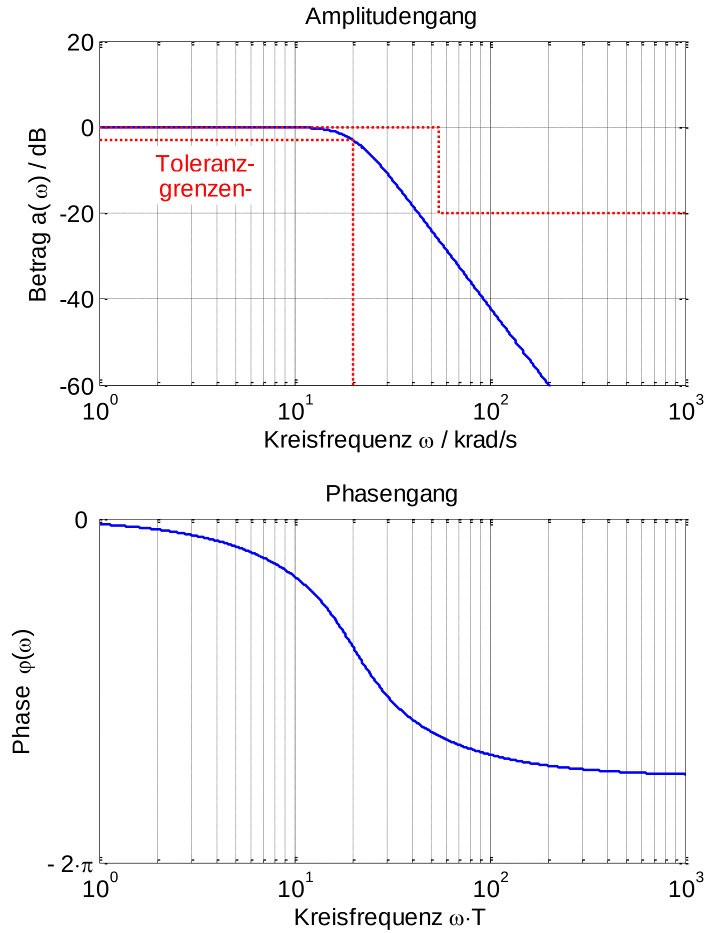
- Die nächste ganzzahlige Filterordnung ist N = 3, mit den Angaben errechnet sich die Übertragungsfunktion zu

$$G(s) = \frac{(20\ \text{krad}/\text{s})^3}{(s + 20\ \text{krad}/\text{s}) \cdot \left(s^2 + s \cdot 20\ \text{krad}/\text{s} + (20\ \text{krad}/\text{s})^2\right)}$$

Standardisierte Entwurfsverfahren

Beispiel: Entwurf von Butterworth-Filtern

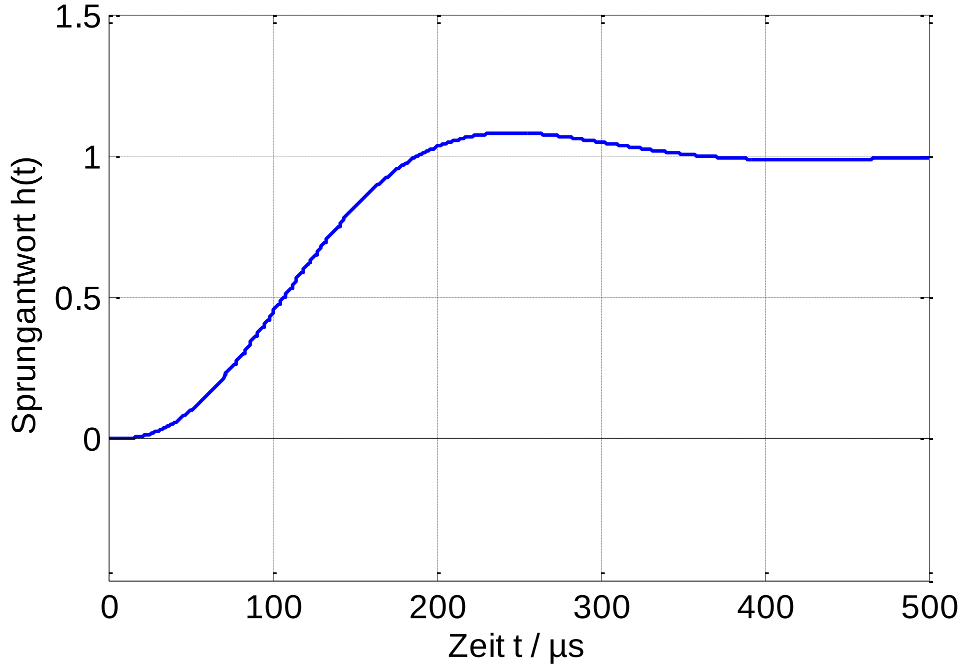
- Amplitudengang fällt von a(0) = 0 dB bis zur halben Grenzfrequenz ω_G nur auf - 0.06 dB ab
- An der Grenzfrequenz beträgt der Amplitudengang erwartungsgemäß $a(\omega_G) = -3$ dB
- Bei der Sperrfrequenz ω_S unterschreitet der Amplitudengang mit $a(\omega_S) = -26.3$ dB den spezifizierten Grenzwert von - 20 dB
- Phasengang beginnt bei $\varphi(0) = 0$ und endet für sehr große Frequenzen bei $\varphi(\infty) = -3\cdot\pi/2$



Standardisierte Entwurfsverfahren

Beispiel: Entwurf von Butterworth-Filtern

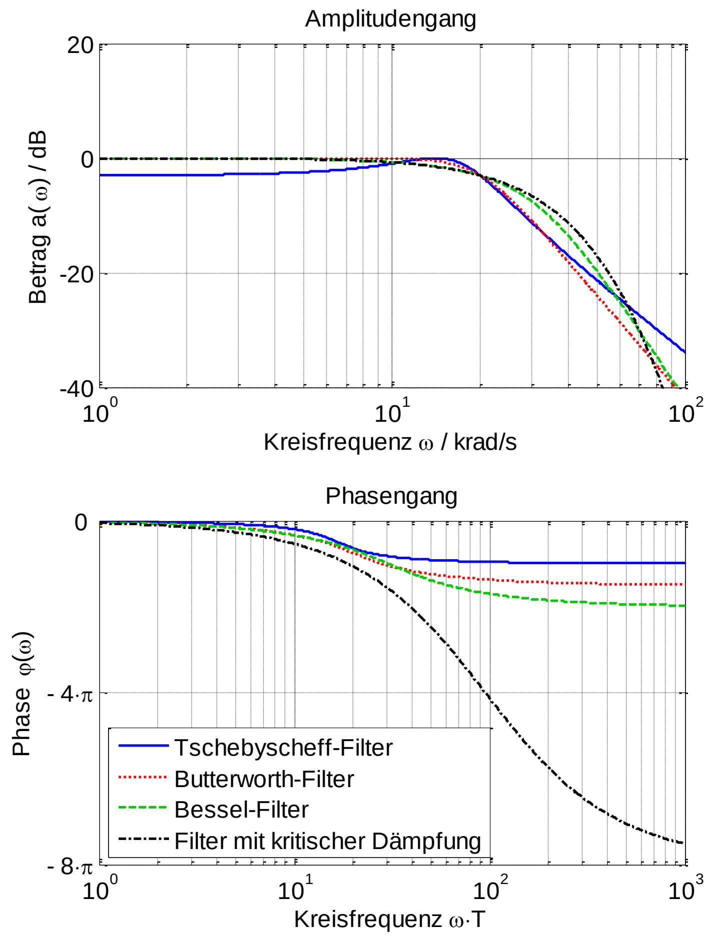
- Aufgrund des konjugiert komplexen Polpaares schwingt die Sprungantwort nach einem Überschwingen ein
- Wegen des moderaten Überschwingens und des flach verlaufenden Frequenzgangs wird der Butterworth-Filter oft eingesetzt



Standardisierte Entwurfsverfahren

Vergleich unterschiedlicher Entwurfsverfahren

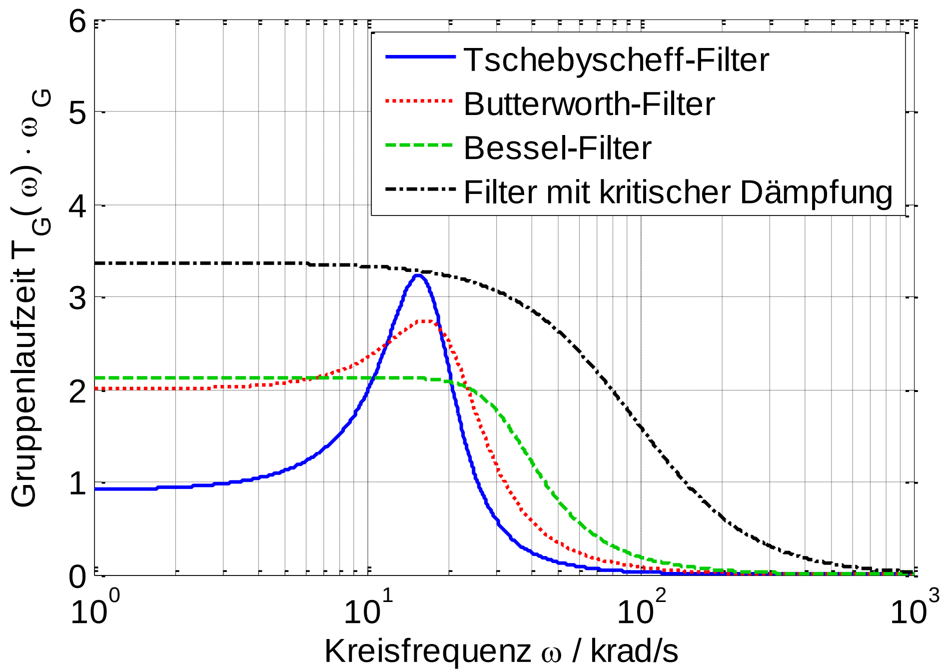
- Anhand des Beispiel zum Filterentwurf werden die unterschiedlichen standardisierten Entwurfs-verfahren miteinander verglichen
- Filter unterscheiden sich bei gleichem Toleranz-schema in ihrer Ordnung N
  - Tschebyscheff-Entwurf : N = 2
  - Butterworth-Filter: N = 3
  - Bessel-Entwurf: N = 4
  - Filter mit kritischer Dämpfung: N = 16
- Alle Entwürfe erfüllen das geforderte Toleranzschema, aber Unterschiede im Durchlass- und Übergangsbereich
- Unterschiede im Phasengang sind wesentlich auf die unterschiedlichen Filterordnungen zurückzuführen



Standardisierte Entwurfsverfahren

Vergleich unterschiedlicher Entwurfsverfahren

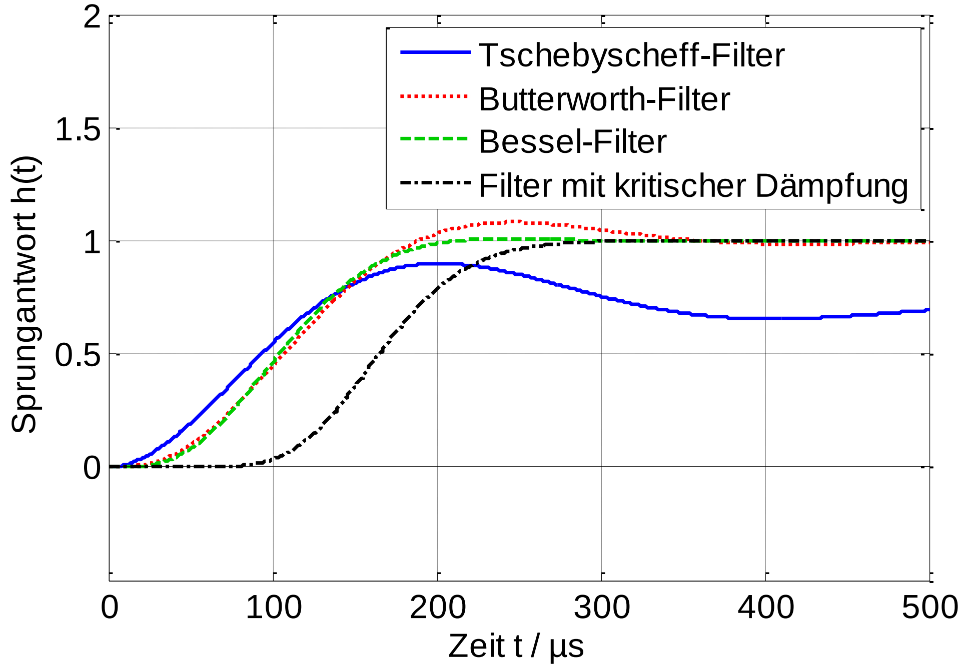
- Vergleich der Gruppenlaufzeiten
- Bessel-Filter hat im Durchlassbereich eine nahezu konstante Gruppenlaufzeit, er weist damit die geringsten Phasenverzerrungen auf
- Phasenverzerrung nimmt über den Filter mit kritischer Dämpfung und Butterworth-Filter bis zum Tschebyscheff-Filter zu



Standardisierte Entwurfsverfahren

Vergleich unterschiedlicher Entwurfsverfahren

- Während das Filter mit kritischer Dämpfung aperiodisch einschwingt, zeigen alle anderen Sprungantworten ein periodisches Einschwingverhalten
- Bessel-Filter schwingt mit minimalem Überschwinger ein
- Länge der Einschwingzeit und die Höhe des Überschwingens nehmen über den Butterworth-Filter bis zum Tschebyscheff-Filter zu



Standardisierte Entwurfsverfahren

Vergleich unterschiedlicher Entwurfsverfahren

Eigenschaft	Filter mit kritischer Dämpfung	Bessel-Filter	Butterworth-Filter	Tschebyscheff-Filter
Erforderliche Filterordnung	Sehr hoch (N = 16)	Klein (N = 4)	Sehr klein (N = 3)	Minimal (N = 2)
Amplitudengang im Durchlassbereich	Amplitudengang monoton fallend	Amplitudengang monoton fallend	Maximal flacher Amplitudengang	Amplitudengang mit definierter Welligkeit
Amplitudengang im Übergangsbereich	Übergang sehr flach	Übergang flach	Übergang mäßig steil	Übergang steil
Amplitudengang im Sperrbereich	Signalabfall um – N·20 dB/Dekade			
Phasengang im Durchlassbereich	Leicht nichtlinear	Linear	Nichtlinear	Stark nichtlinear
Phasen-verzerrung	Gering	Minimal	Mäßig	Hoch
Sprungantwort	Aperiodisches Einschwingen	Minimales Überschwingen	Mäßiges Überschwingen	Starkes Überschwingen

Standardisierte Entwurfsverfahren

Übungsaufgabe: Entwurf von Butterworth-Filtern

- Entwerfen Sie ein Butterworth-Filter mit folgenden Spezifikationsmerkmalen:
  - Durchlassband bis $\omega \leq \omega_G$ = 100 krad/s
  - Minimale Leistungsverstärkung bei ω_G beträgt 0.5
  - Beginn des Sperrbandes bei ω_S = 150 krad/s
  - Maximale Leistungsverstärkung bei ω_S beträgt 0.1
- Skizzieren Sie das Toleranzschema.
- Bestimmen Sie die erforderliche Filterordnung.
- Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion G(s) des Filters.
- Stellen Sie die Pollagen in der komplexen Ebene dar.