Hochschule Karlsruhe
Technik und Wirtschaft
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Näher dran.

EIT Fakultät für Elektro- und Informationstechnik

Systemtheorie

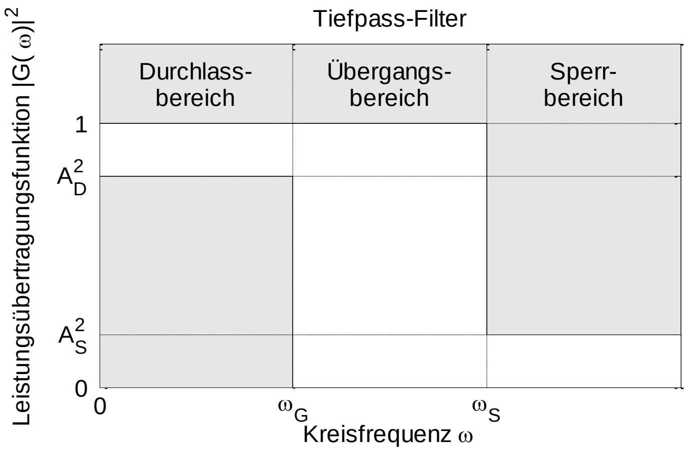
Vorlesung 25: Frequenztransformation

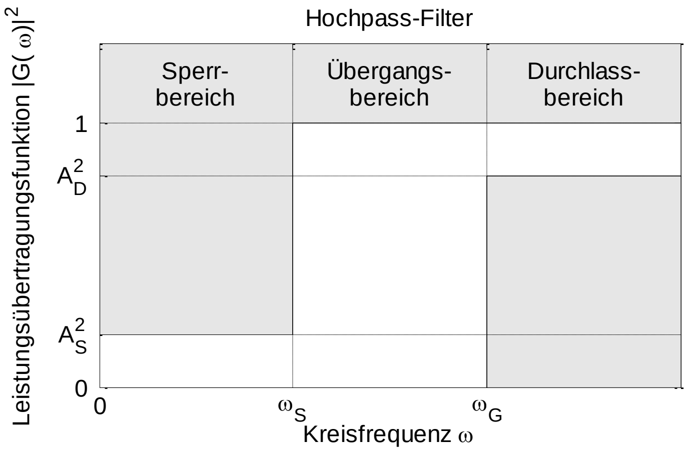
Fakultät für Elektro- und Informationstechnik, Manfred Strohrmann

Frequenztransformation

Tiefpass-Hochpass-Transformation

- Beschriebene Entwurfsverfahren sind nur für Tiefpass-Filter geeignet
- Frequenz-Transformation führt den Entwurf von Hochpass- und Bandpass-Filtern sowie Bandsperren auf den Entwurf eines Tiefpass-Filters zurück
- Frequenzverhalten von Tiefpass- und Hochpass- Filtern sind reziprok zueinander
- Tiefpässe lassen Signale im niedrigen Frequenzbereich und Hochpässe lassen Signale im hohen Frequenzbereich passieren
- Einführen einer Transformation mit dem Ziel, bei Hochpässen für $\omega \to \infty$ dasselbe Frequenzverhalten zu erreichen wie bei Tiefpässen für $\omega \to 0$





Frequenztransformation

Tiefpass-Hochpass-Transformation

- Frequenzverhältnisse ω/ω_G werden durch ihren reziproken Wert ω_G/ω ersetzt
- Amplitudengang wird bei logarithmischer Darstellung an der Frequenz $\omega = \omega_G$ gespiegelt und in umgekehrter Richtung durchlaufen
- In der Übertragungsfunktion $G_{TP}(s)$ wird die Substitution der Variable s durchgeführt

$$G_{HP}(s) = G_{TP}(s)\Big|_{s \to \frac{\omega_G^2}{s}}$$

- Für den Filterentwurf muss bei der Bestimmung der Filterordnung N auch die Grenze des Sperrbereichs transformiert werden

$$\omega_{S,TP} = \frac{\omega_G^2}{\omega_{S,HP}}$$

Frequenz bei Tiefpass ω	**Frequenz bei Hochpass ω_G^2/ω**
0	∞
$\omega_G/2$	$2 \cdot \omega_G$
ω_G	ω_G
$2 \cdot \omega_G$	$\omega_G/2$
∞	0

Frequenztransformation

Beispiel: Tiefpass-Hochpass-Transformation

- Tiefpass erster Ordnung mit der Grenzfrequenz ω_G und der Übertragungsfunktion

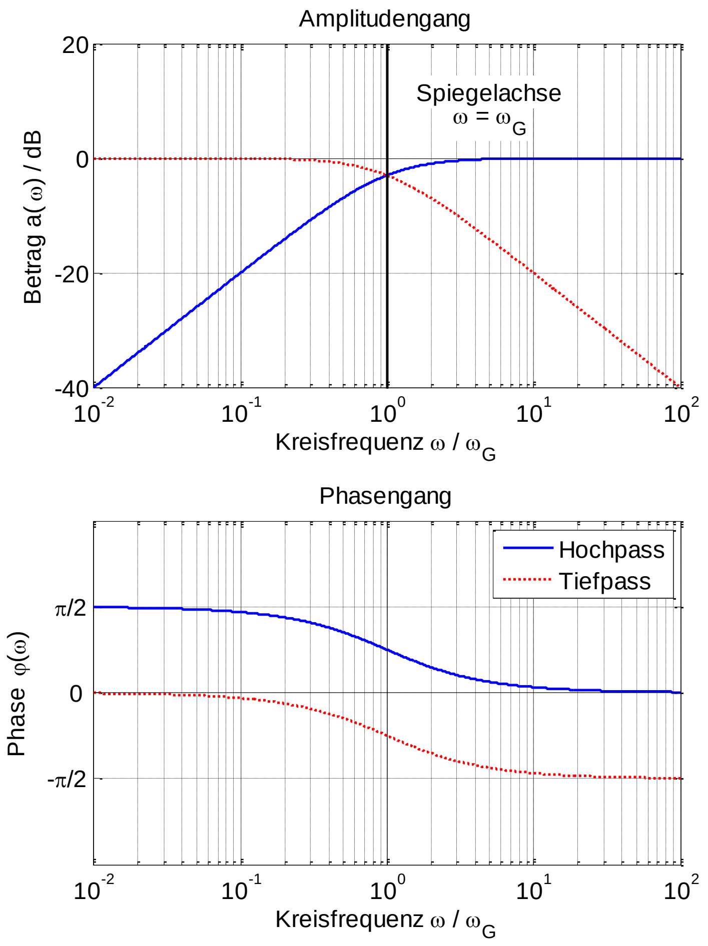
$$G_{TP}(s) = \frac{1}{1+\frac{s}{\omega_G}}$$

- Frequenztransformation führt zu der Übertragungsfunktion des Hochpasses

$$G_{HP}(s) = G_{TP}(s)\Big|_{s\to\frac{\omega_G^2}{s}} = \frac{1}{1+\frac{1}{\omega_G}\cdot\frac{\omega_G^2}{s}} = \frac{1}{1+\frac{\omega_G}{s}}$$

mit dem Frequenzgang

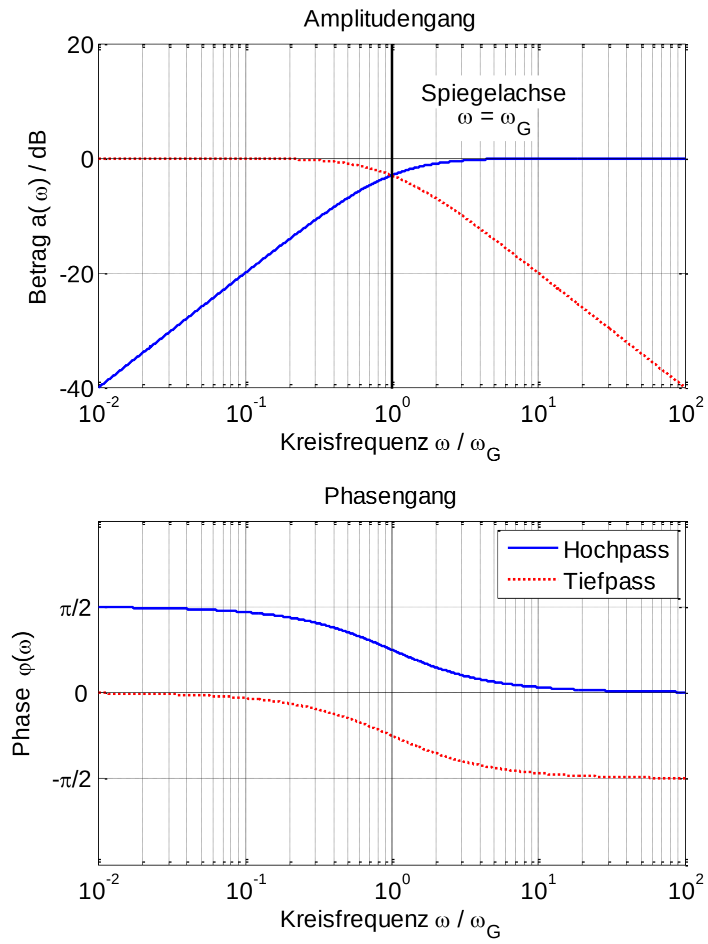
$$G_{HP}(\omega) = \frac{j\cdot\frac{\omega}{\omega_G}}{1+j\cdot\frac{\omega}{\omega_G}}$$



Frequenztransformation

Beispiel: Tiefpass-Hochpass-Transformation

- Amplitudengänge der beiden Filter schneiden sich bei der Grenzfrequenz $\omega = \omega_G$, hier haben beide Übertragungsfunktionen den Wert $a(\omega_G) = -3$ dB
- Amplitudengang verdeutlicht den Vorgang der Spiegelung an der Stelle $\omega = \omega_G$
- Änderung des Phasengangs wird durch Interpretation des Pol-Nullstellen-Diagramms deutlich
- Bei der Substitution des Ausdrucks s durch ω_G^2/s werden N Nullstellen im Koordinatenursprung hinzugefügt
- Nullstellen bewirkt eine Phasenverschiebung von $\pi/2$, im Beispiel des Filters erster Ordnung ergibt sich zwischen Tiefpass- und Hochpass-Filter die Phasenverschiebung von $\pi/2$



Frequenztransformation

Übungsaufgabe: Tiefpass-Hochpass-Transformation

Entwerfen Sie ein Butterworth-Hochpass-Filter mit einem Durchlassbereich $\omega > \omega_G = 10$ krad/s, das bei der Grenzfrequenz $\omega_G = 10$ krad/s eine minimale Leistungsverstärkung von $A_D^2 = 0.5$ besitzt. Unterhalb der Frequenz $\omega_{S,HP} = 5$ krad/s soll das Filter eine maximale Leistungsverstärkung von $A_S^2 = 0.1$ aufweisen.

- Bestimmen Sie zunächst das Toleranzschema für das äquivalenten Tiefpass-Filter
- Entwerfen Sie das äquivalente Tiefpass-Filter und bestimmen Sie die Übertragungsfunktion
- Führen Sie eine Tiefpass-Hochpass-Transformation durch und geben Sie die Übertragungsfunktion des Hochpasses an
- Skizzieren Sie das Bode-Diagramm

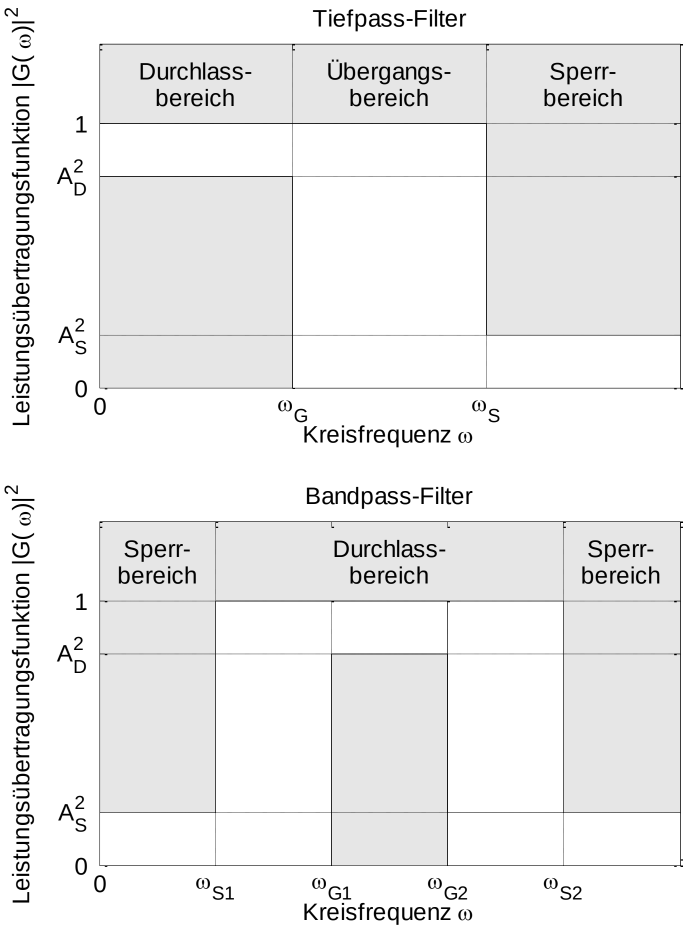
Frequenztransformation

Tiefpass-Bandpass-Transformation

- Für Bandpass-Filtern wird nach demselben Schema eine Tiefpass-Bandpass-Transformation durchgeführt
- Transformation liegt die Vorstellung zugrunde, den Amplitudengang des Tiefpasses von $\omega = \infty$ bis $\omega = 0$ und anschließend in umgekehrter Richtung erneut zu durchlaufen
- Mittenfrequenz des Bandpasses

$$\omega_M = \sqrt{\omega_{G1} \cdot \omega_{G2}}$$

soll der Frequenz $\omega = 0$ des Tiefpasses entsprechen



Frequenztransformation

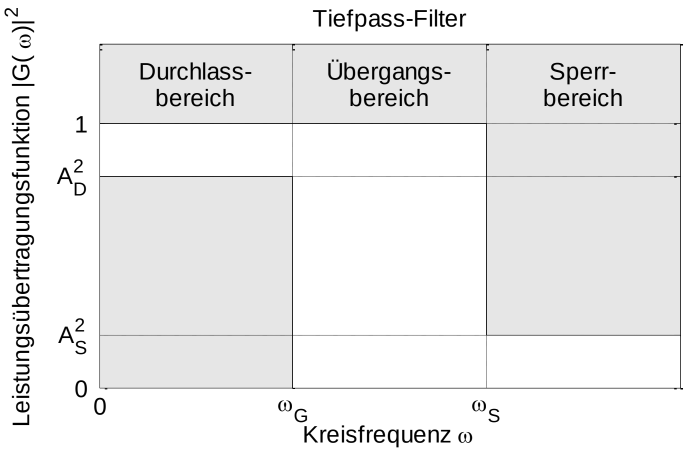
Tiefpass-Bandpass-Transformation

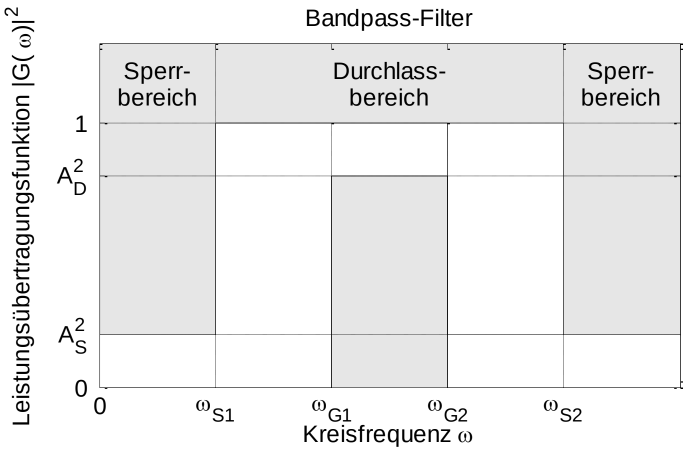
- Frequenztransformation für Bandpass-Filter

$$G_{BP}(s) = G_{TP}(s)\Big|_{s \to \frac{s^2 + \omega_{G1} \cdot \omega_{G2}}{s}}$$

- Grenzfrequenz ω_G des Tiefpasses entspricht der Bandbreite des Bandpasses

$$\omega_G = \Delta\omega = \omega_{G2} - \omega_{G1}$$





Frequenztransformation

Beispiel: Tiefpass-Bandpass-Transformation

- Tiefpass erster Ordnung mit der Grenzfrequenz ω_G und der Übertragungsfunktion

$$G_{TP}(s) = \frac{1}{1 + \frac{s}{\omega_G}}$$

- Frequenztransformation führt zu der Übertragungsfunktion des Bandpasses

$$G_{BP}(s) = G_{TP}(s)\Big|_{s \to \frac{s^2 + \omega_{G1} \cdot \omega_{G2}}{s}} = \frac{1}{1 + \frac{\frac{s^2 + \omega_{G1} \cdot \omega_{G2}}{s}}{\omega_{G2} - \omega_{G1}}} = \frac{s \cdot (\omega_{G2} - \omega_{G1})}{s^2 + s \cdot (\omega_{G2} - \omega_{G1}) + \omega_{G1} \cdot \omega_{G2}}$$

- Bandpass besitzt den Frequenzgang

$$G_{BP}(\omega) = \frac{1}{1 + \frac{-\omega^2 + \omega_{G1} \cdot \omega_{G2}}{j \cdot \omega \cdot (\omega_{G2} - \omega_{G1})}} = \frac{1}{1 + j \cdot \frac{\sqrt{\omega_{G1} \cdot \omega_{G2}}}{\omega_{G2} - \omega_{G1}} \cdot \left(\frac{\omega}{\sqrt{\omega_{G1} \cdot \omega_{G2}}} - \frac{\sqrt{\omega_{G1} \cdot \omega_{G2}}}{\omega} \right)} = \frac{1}{1 + j \cdot Q \cdot \left(\frac{\omega}{\omega_M} - \frac{\omega_M}{\omega} \right)}$$

Frequenztransformation

Beispiel: Tiefpass-Bandpass-Transformation

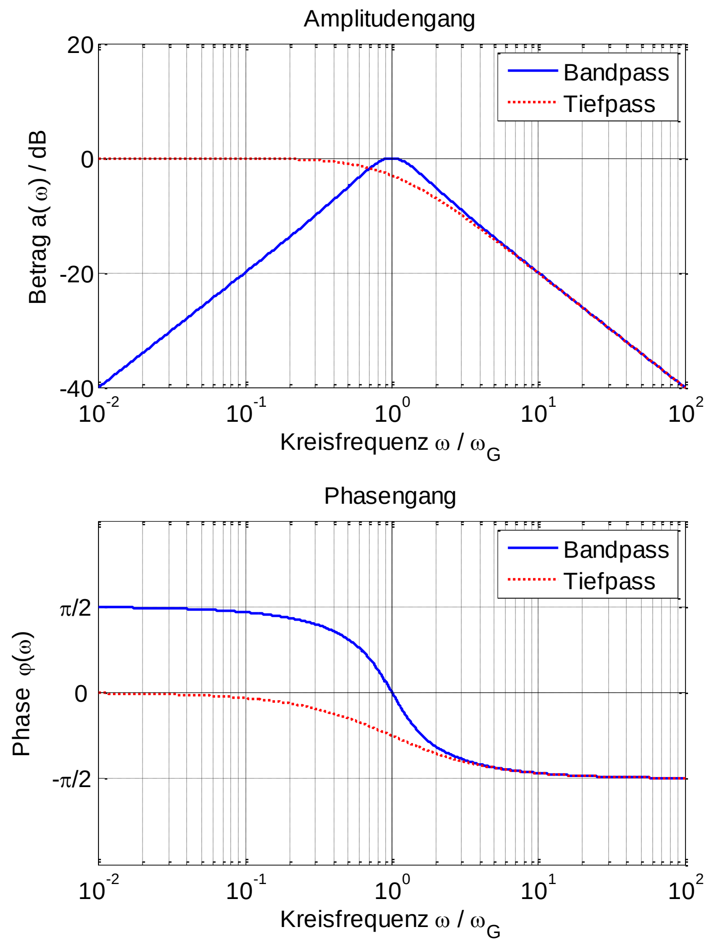
- Bandpasses mit der Mittenfrequenz

  $$\omega_M = \sqrt{\omega_{G1} \cdot \omega_{G2}}$$

  und der Güte

  $$Q = \frac{\sqrt{\omega_{G1} \cdot \omega_{G2}}}{\omega_{G2} - \omega_{G1}} = \frac{\omega_M}{\Delta\omega}$$

- Maximum des Amplitudengangs liegt erwartungsgemäß an der Stelle $\omega = \omega_M = \omega_G$
- Bandbreite des Bandpasses entspricht der Grenzfrequenz des Tiefpasses $\Delta\omega = \omega_G$



Frequenztransformation

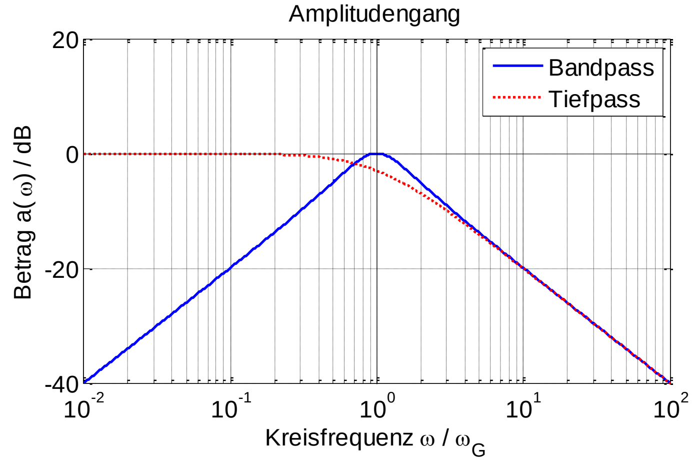
Beispiel: Tiefpass-Bandpass-Transformation

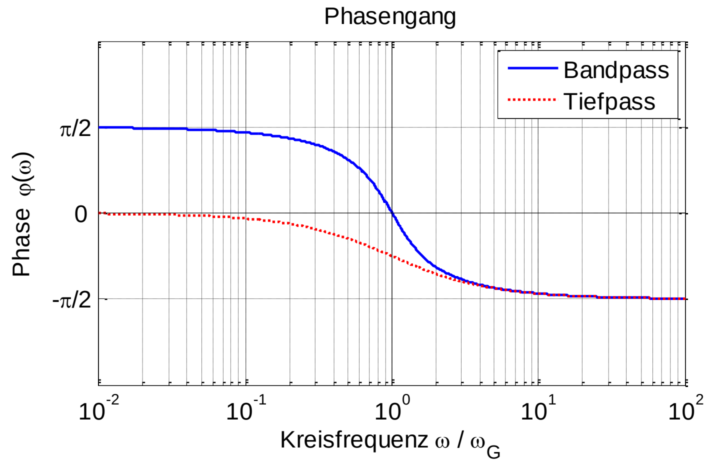
- Bandpass hat die Grenzfrequenzen

$$\omega_{G1} = -\frac{\Delta\omega}{2} + \sqrt{\frac{\Delta\omega^2}{4} + \omega_M^2} = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right) \cdot \omega_G = 0.618 \cdot \omega_G$$

$$\omega_{G2} = \frac{\Delta\omega}{2} + \sqrt{\frac{\Delta\omega^2}{4} + \omega_M^2} = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right) \cdot \omega_G = 1.618 \cdot \omega_G$$

- Änderung des Phasengangs wird wieder an dem Pol-Nullstellen-Diagramm verdeutlicht
- Die Ordnung des Nennerpolynoms wird verdoppelt, außerdem wird eine Nullstelle im Koordinatenursprung hinzugefügt, jede der N Nullstellen bewirkt eine Phasenverschiebung von $\pi/2$





Frequenztransformation

Tiefpass-Bandpass-Transformation

- Mittenfrequenz wird beim Entwurf so gelegt, dass sie bei logarithmischem Maßstab genau zwischen der unteren und oberen Grenzfrequenz liegt
- Sperrfrequenzen ω_{S1} und ω_{S2} ergeben sich aus der Anwendung des Filters, sie müssen nicht symmetrisch um die Mittenfrequenz liegen
- Für den Entwurf ist die Sperrfrequenz ω_{S1} oder ω_{S2} zu verwenden, die zu der steileren Filterordnung führt
- Verhältnis der kritischen Frequenzen im Toleranzschema ist für die Auswahl wesentlich

Bedingung aus den Frequenzvorgaben des Toleranzschemas	Berechnung der Sperrfrequenz für Bestimmung der Filterordnung
$\frac{\omega_M}{\omega_{S1}} < \frac{\omega_{S2}}{\omega_M}$	$\omega_{S,TP} = \frac{\omega_{G1} \cdot \omega_{G2} - \omega_{S1,BP}^2}{\omega_{S1,BP}}$
$\frac{\omega_M}{\omega_{S1}} > \frac{\omega_{S2}}{\omega_M}$	$\omega_{S,TP} = \frac{\omega_{S2,BP}^2 - \omega_{G1} \cdot \omega_{G2}}{\omega_{S2,BP}}$

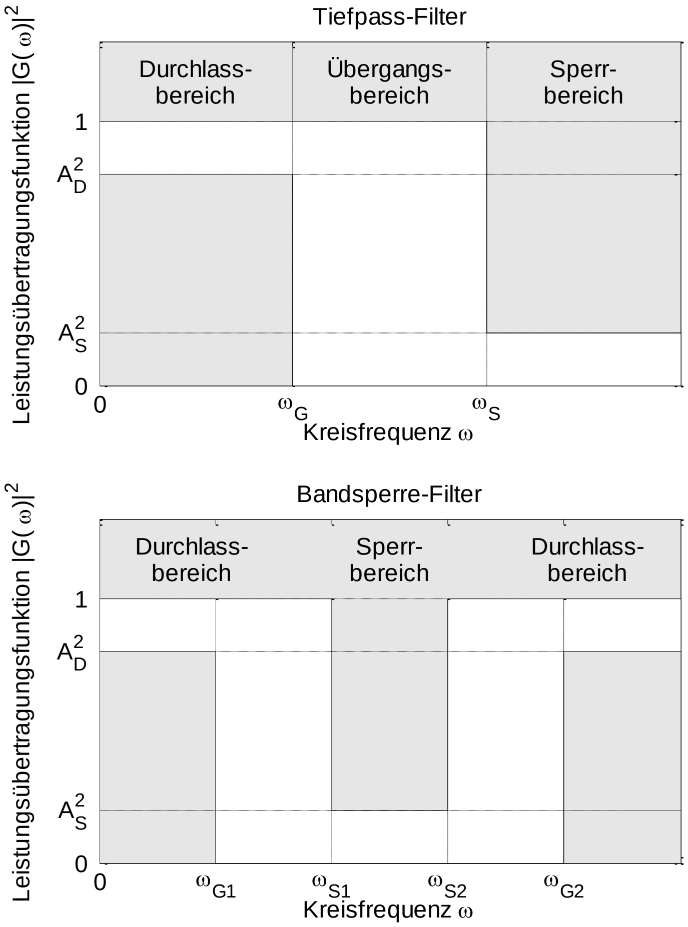
Frequenztransformation

Tiefpass-Bandsperre-Transformation

- Auch für die Entwicklung von Bandsperren existiert eine Frequenztransformation
- Zur Realisierung einer Bandsperre muss der Amplitudengang des Tiefpasses von $\omega = 0$ bis $\omega = \infty$ und anschließend in umgekehrter Richtung durchlaufen werden
- Mittenfrequenz der Bandsperre

$$\omega_M = \sqrt{\omega_{G1} \cdot \omega_{G2}}$$

entspricht dabei die Frequenz $\omega = \infty$ des Tiefpasses



Frequenztransformation

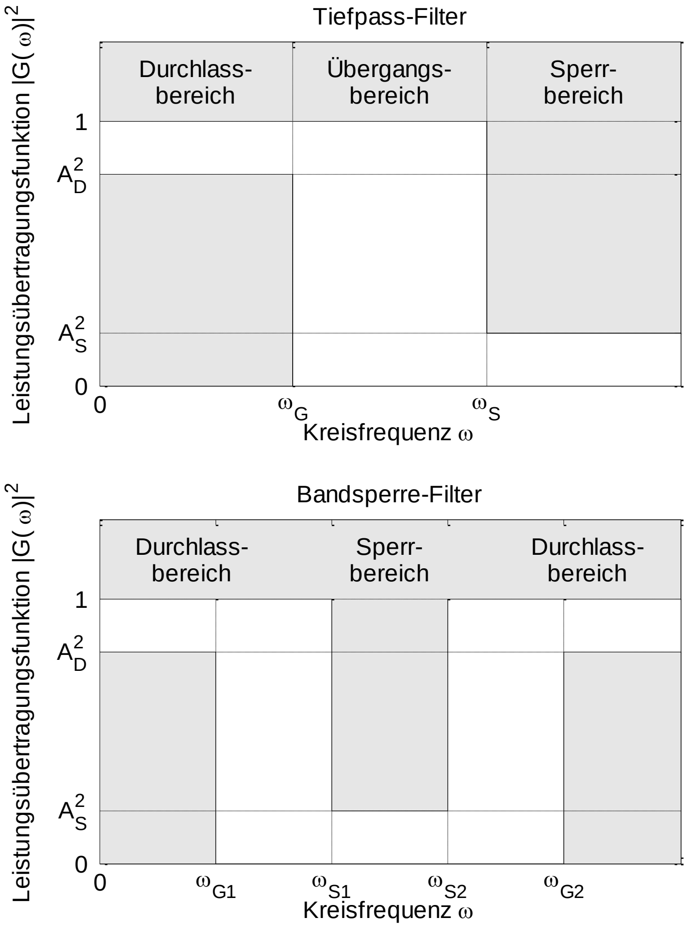
Tiefpass-Bandsperre-Transformation

- Frequenztransformation für Bandsperre-Filter

$$G_{BS}(s) = G_{TP}(s)\Big|_{s \to \frac{s \cdot \omega_G^2}{s^2 + \omega_{G1} \cdot \omega_{G2}}}$$

- Grenzfrequenz ω_G des Tiefpasses entspricht der Bandbreite der Bandsperre

$$\omega_G = \Delta\omega = \omega_{G2} - \omega_{G1}$$



Frequenztransformation

Beispiel: Tiefpass-Bandsperre-Transformation

- Tiefpass erster Ordnung mit der Grenzfrequenz ω_G und der Übertragungsfunktion

$$G_{TP}(s) = \frac{1}{1+\frac{s}{\omega_G}}$$

- Frequenztransformation führt zu der Übertragungsfunktion der Bandsperre

$$G_{BS}(s) = G_{TP}(s)\Big|_{s \to \frac{s\cdot\omega_G^2}{s^2+\omega_{G1}\cdot\omega_{G2}}} = \frac{1}{1+\frac{s\cdot\left(\omega_{G2}-\omega_{G1}\right)}{s^2+\omega_{G1}\cdot\omega_{G2}}} = \frac{s^2+\omega_{G1}\cdot\omega_{G2}}{s^2+\omega_{G1}\cdot\omega_{G2}+s\cdot\left(\omega_{G2}-\omega_{G1}\right)+\omega_{G1}\cdot\omega_{G2}} = 1-G_{BP}(s)$$

- Bandsperre besitzt den Frequenzgang

$$G_{BS}(\omega) = 1-\frac{1}{1+j\cdot Q\cdot\left(\frac{\omega}{\omega_M}-\frac{\omega_M}{\omega}\right)}$$

Frequenztransformation

Beispiel: Tiefpass-Bandsperre-Transformation

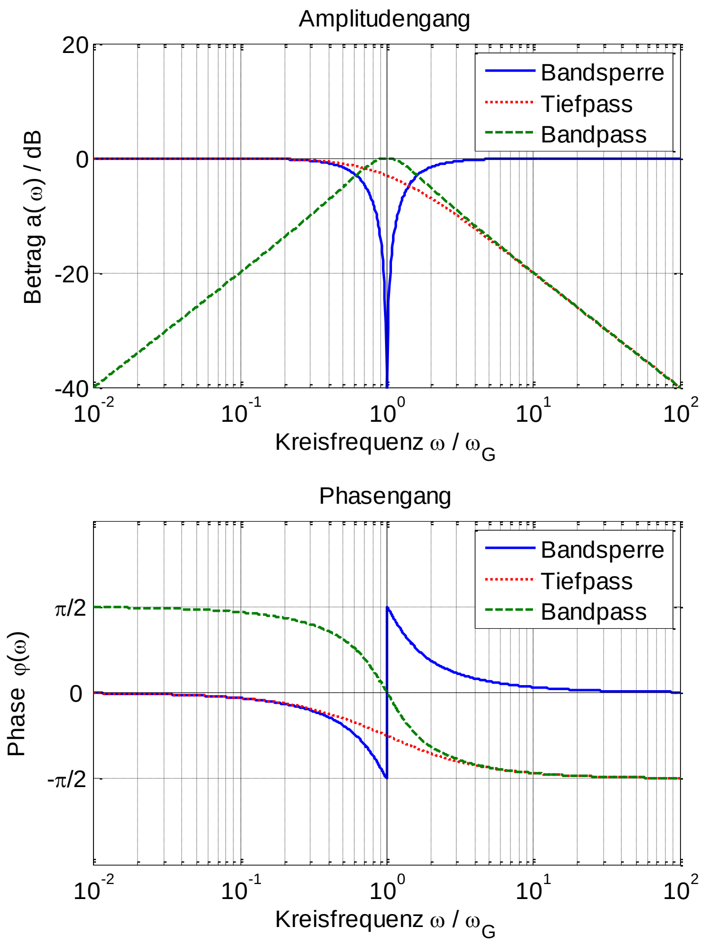
- Bandsperre mit der Mittenfrequenz

$$\omega_M = \sqrt{\omega_{G1} \cdot \omega_{G2}}$$

und der Güte

$$Q = \frac{\sqrt{\omega_{G1} \cdot \omega_{G2}}}{\omega_{G2} - \omega_{G1}} = \frac{\omega_M}{\Delta\omega}$$

- Minimum des Amplitudengangs liegt erwartungsgemäß an der Stelle $\omega = \omega_M = \omega_G$
- Bandbreite der Bandsperre entspricht der Grenzfrequenz des Tiefpasses $\Delta\omega = \omega_G$



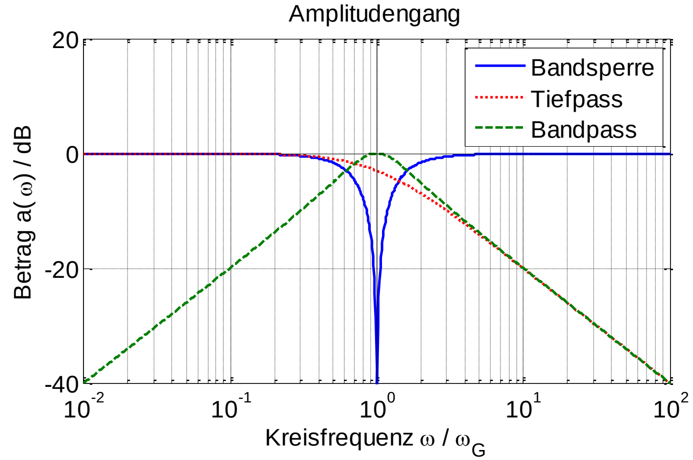
Frequenztransformation

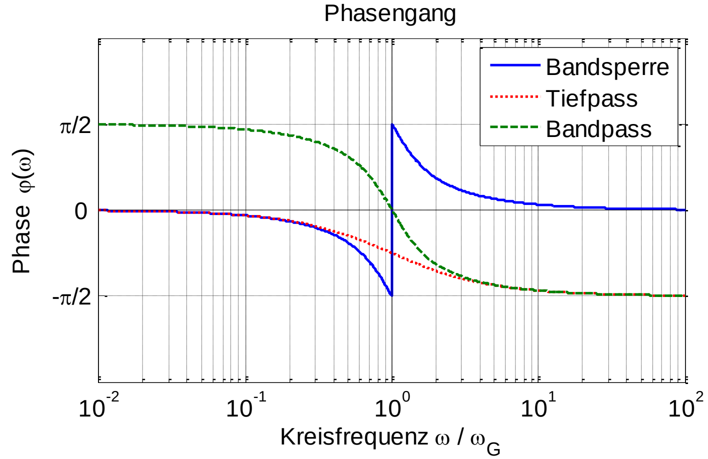
Beispiel: Tiefpass-Bandsperre-Transformation

- Bandsperre hat die Grenzfrequenzen

$$\omega_{G1} = -\frac{\Delta\omega}{2} + \sqrt{\frac{\Delta\omega^2}{4} + \omega_M^2} = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \right) \cdot \omega_G = 0.618 \cdot \omega_G$$

$$\omega_{G2} = \frac{\Delta\omega}{2} + \sqrt{\frac{\Delta\omega^2}{4} + \omega_M^2} = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \right) \cdot \omega_G = 1.618 \cdot \omega_G$$





- Änderung des Phasengangs wird wieder an dem Pol-Nullstellen-Diagramm verdeutlicht
- Ordnung des Nennerpolynoms wird verdoppelt, außerdem wird eine konjugiert komplexe Nullstelle $\pm j \cdot \omega_M$ hinzugefügt.

Frequenztransformation

Tiefpass-Bandsperre-Transformation

- Mittenfrequenz wird beim Entwurf so gelegt, dass sie bei logarithmischem Maßstab genau zwischen der unteren und oberen Grenzfrequenz liegt
- Sperrfrequenzen ω_{S1} und ω_{S2} ergeben sich aus der Anwendung des Filters, sie müssen nicht symmetrisch um die Mittenfrequenz liegen
- Für den Entwurf ist die Sperrfrequenz ω_{S1} oder ω_{S2} zu verwenden, die zu der steileren Filterordnung führt
- Verhältnis der kritischen Frequenzen im Toleranzschema ist für die Auswahl wesentlich

Bedingung aus den Frequenzvorgaben des Toleranzschemas	Berechnung der Sperrfrequenz für Bestimmung der Filterordnung
$\frac{\omega_M}{\omega_{S1}} < \frac{\omega_{S2}}{\omega_M}$	$\omega_{S,TP} = \frac{\omega_{S1,BS} \cdot \omega_G^2}{-\omega_{S1,BS}^2 + \omega_{G1} \cdot \omega_{G2}}$
$\frac{\omega_M}{\omega_{S1}} > \frac{\omega_{S2}}{\omega_M}$	$\omega_{S,TP} = \frac{\omega_{S2,BS} \cdot \omega_G^2}{\omega_{S2,BS}^2 - \omega_{G1} \cdot \omega_{G2}}$