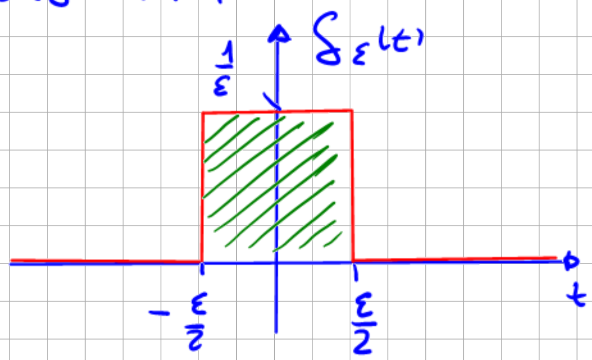
Systemtheorie: Impulsfunktion und Signalalgebra

- Sprungfunktion wurde eingeführt, sie wird oftmals als Testfunktion für dynamische Systeme eingesetzt
- Eine weitere, ganz besondere Testfunktion ist die Impulsfunktion, die auch als Dirac-Impuls bezeichnet wird

Herleitung der Impulsfunktion über eine Rechteckfunktion

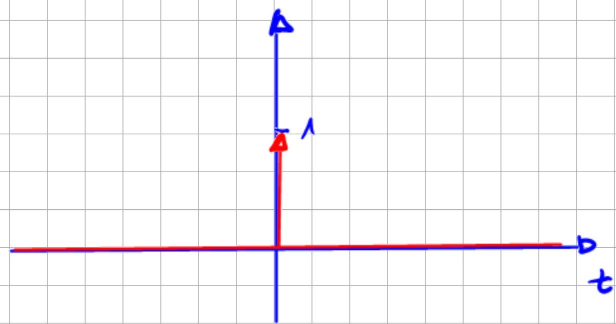


$$\delta_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \left(\sigma\left(t + \frac{\varepsilon}{2}\right) - \sigma\left(t - \frac{\varepsilon}{2}\right) \right)$$

Fläche unter der Kurve ist unabhängig vom Parameter ε immer gleich 1

Grenzübergang $\varepsilon \to 0$: das Rechteck wird unendlich schmal und unendlich hoch, Fläche bleibt 1

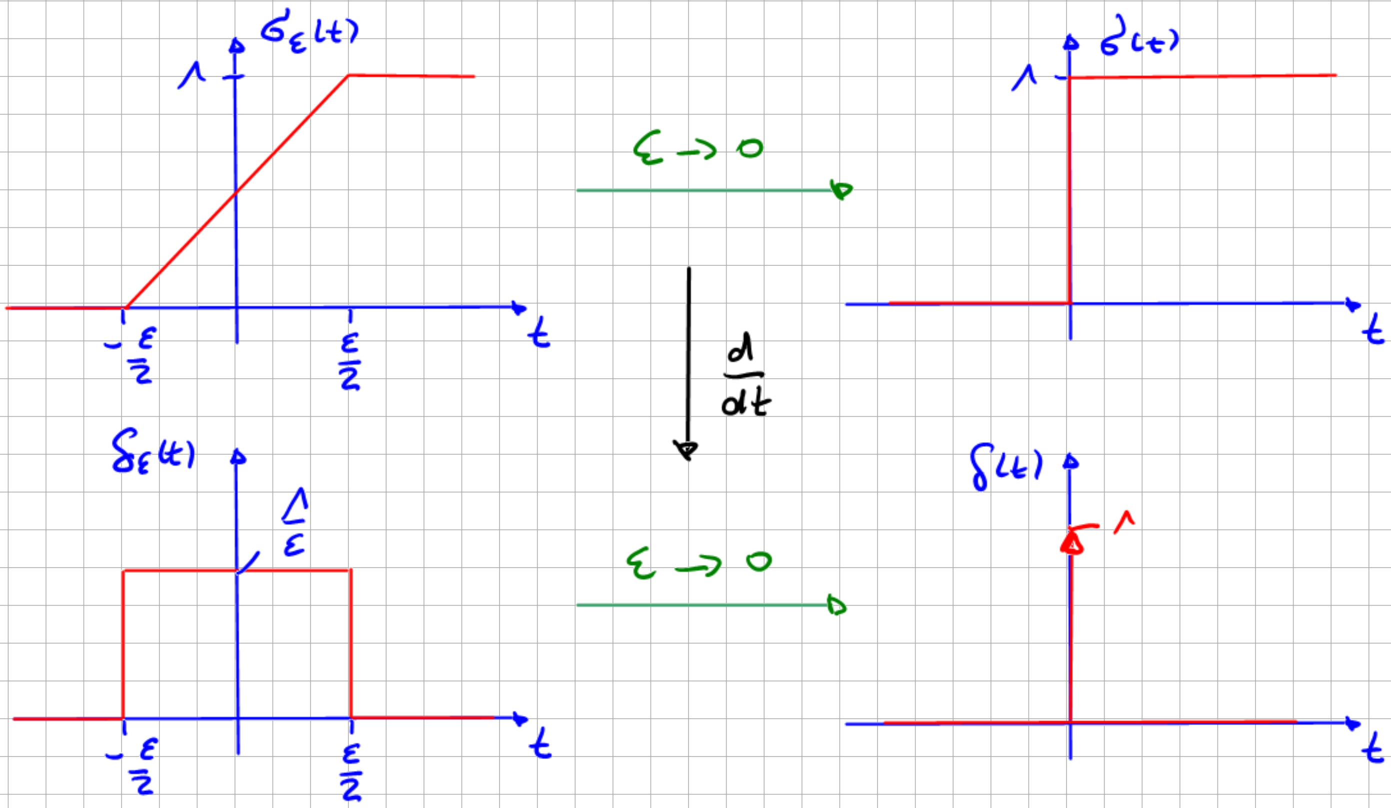
$$\lim_{\varepsilon \to 0} \delta_\varepsilon(t) = \delta(t) \quad \text{Impulsfunktion}$$



Pfeil der Länge 1 symbolisiert die unendliche Höhe und den Flächeninhalt von 1

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,dt = 1$$

- Zusammenhang zwischen Sprung- und Impulsfunktionen



Durch den Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ werden die Sprungfunktion $\sigma_\varepsilon(t)$ und die Impulsfunktion $\delta_\varepsilon(t)$ immer steiler

Ableitung von $\sigma_\varepsilon(t)$ nach der Zeit führt zu

$$\frac{d\sigma_\varepsilon}{dt} = \delta_\varepsilon(t)$$

Aus dem Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ ergibt sich

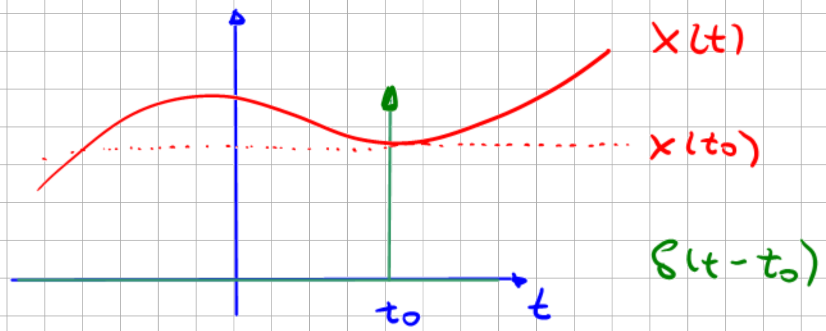
$$\frac{d\sigma}{dt} = \delta(t)$$

Die Impulsfunktion $\delta(t)$ ist die zeitliche Ableitung der Sprungfunktion. Außerdem gilt die Umkehrung

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\, d\tau$$

Die Sprungfunktion ist die Stammfunktion der Impulsfunktion.

- Impulsfunktion die Ausblendeigenschaft



$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\cdot\delta(t-t_0)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t_0)\cdot\delta(t-t_0)\,dt$$

Produkt $x(t)\cdot\delta(t-t_0)$ ist nur an der Stelle $t=t_0$ von null verschieden

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t_0)\cdot\delta(t-t_0)\,dt = x(t_0)\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)\,dt$$

$x(t_0)$ hängt nicht von t ab und kann vor das Integral gezogen werden

$$x(t_0)\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)\,dt = x(t_0)\cdot 1 = x(t_0)$$

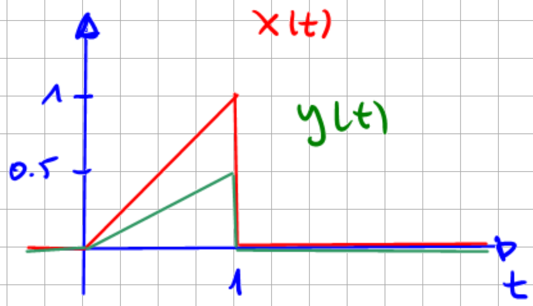
Fläche unter dem Integral ist 1

Daraus ergibt sich die Ausblendeigenschaft der Impulsfunktion

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\cdot\delta(t-t_0)\,dt = x(t_0)$$

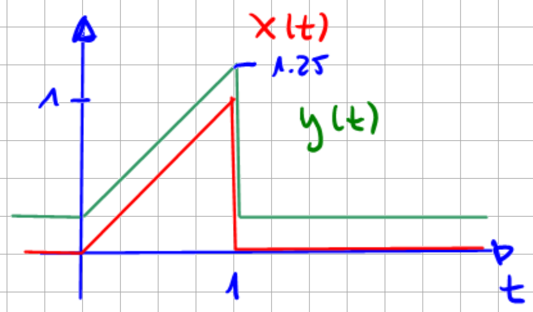
Beispiel: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-3\cdot t}\cdot\delta(t-4)\,dt = e^{-3\cdot 4} = e^{-12}$

- Signalalgebra: Beschreibung von Signalen als Kombination bekannter Signale (Superposition)



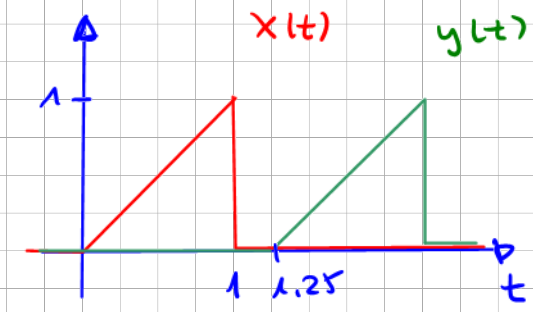
Skalierung der Amplitude:

$y(t) = \frac{1}{2} \cdot x(t)$



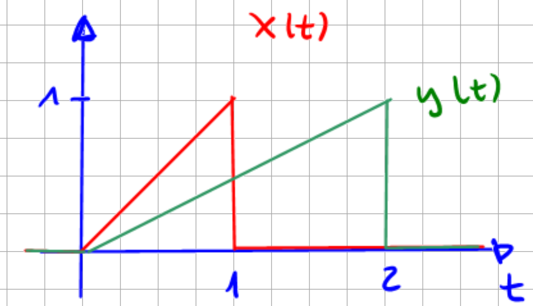
Verschiebung des Signals nach oben:

$y(t) = x(t) + 0.25$



Zeitliche Verschiebung des Signals um t_0 nach rechts

$y(t) = x(t - 1{,}25)$



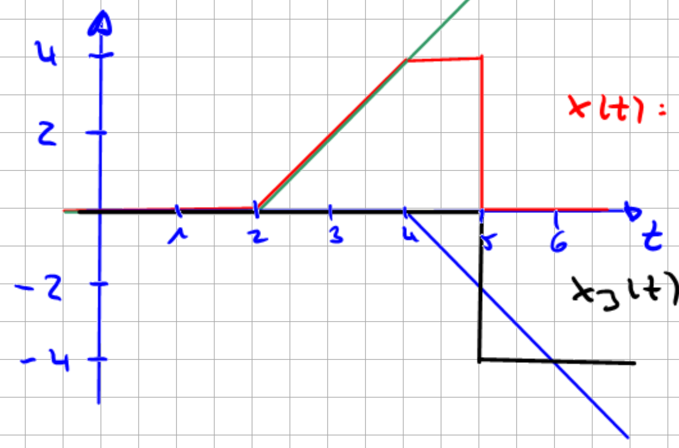
Ein Signal $y(t) = x(a \cdot t)$ ist gegenüber dem Signal $x(t)$

- gedehnt $(0 < a < 1)$
- gestaucht $(a > 1)$

$y(t) = x(t/2)$

Diese Regeln erlauben die geschlossene Darstellung von Signalen, die abschnittsweise definiert sind

Beispiel:



$x_1(t)$: Rampe

$x(t)$: ursprüngliches Signal

$x_3(t)$: Sprung nach unten

$x_2(t)$: Steigung von der Rampe

Kompensation der

Bestimmung der Teilfunktionen:

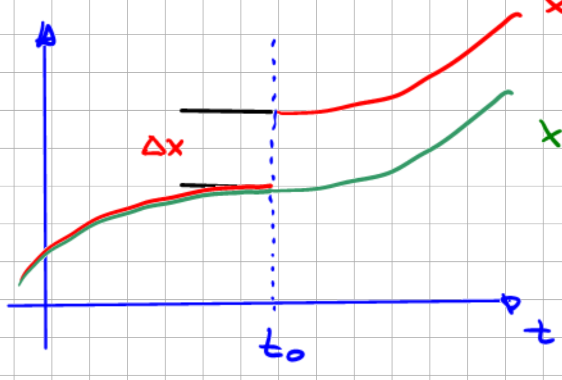
$$x_1(t) = 2\cdot(t-2)\cdot\sigma(t-2)$$

$$x_2(t) = -2(t-4)\cdot\sigma(t-4)$$

$$x_3(t) = -4\cdot\sigma(t-5)$$

$$x(t) = 2\cdot(t-2)\cdot\sigma(t-2) - 2\cdot(t-4)\cdot\sigma(t-4) - 4\cdot\sigma(t-5)$$

- Verallgemeinerte Ableitung erlaubt die Ableitung von Funktionen mit Sprüngen



$x(t)$ mit Sprung an der Stelle $t=t_0$

$x_s(t)$ stetig differenzierbar

$$x(t) = x_s(t) + \Delta x\cdot\sigma(t-t_0)$$

Ableitung nach der Zeit mit $\delta(t) = \frac{d\sigma}{dt}$:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx_s}{dt} + \Delta x\cdot\delta(t-t_0)$$

Beispiel mit der Funktion oben:

$$x(t) = \overset{u}{2\cdot(t-2)}\cdot\overset{v}{\varepsilon(t-2)} - \overset{u}{2\cdot(t-4)}\cdot\overset{v}{\varepsilon(t-4)} - 4\cdot\varepsilon(t-5)$$

$$\frac{dx}{dt} = \overset{u'v}{2\cdot\varepsilon(t-2)} + \underbrace{\cancel{\overset{u}{2\cdot(t-2)}\cdot\overset{v'}{\delta(t-2)}}}_{=0}$$

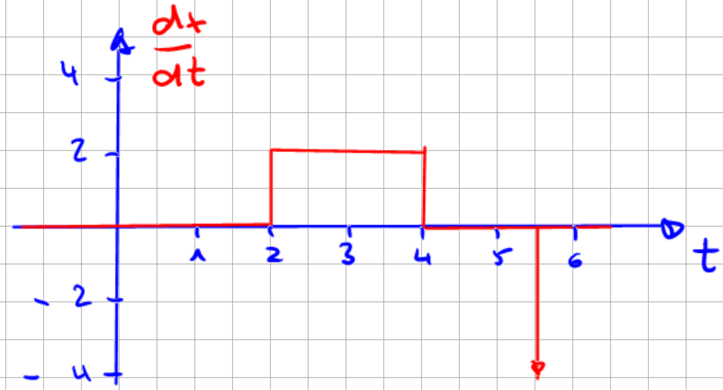
$$- \overset{u'v}{2\cdot\varepsilon(t-4)} - \underbrace{\cancel{\overset{u}{2(t-4)}\cdot\overset{v'}{\delta(t-4)}}}_{=0}$$

$$- 4\cdot\delta(t-5)$$

einer der beiden Faktoren ist immer null

$$\frac{dx}{dt} = 2\cdot\varepsilon(t-2) - 2\cdot\varepsilon(t-4) - 4\cdot\delta(t-5)$$

Skizze des Ergebnisses:



Hausaufgabe:

- Video zur Impulsfunktion auf Systemtheorie Online
- Übungsaufgaben 2.1 und 2.3