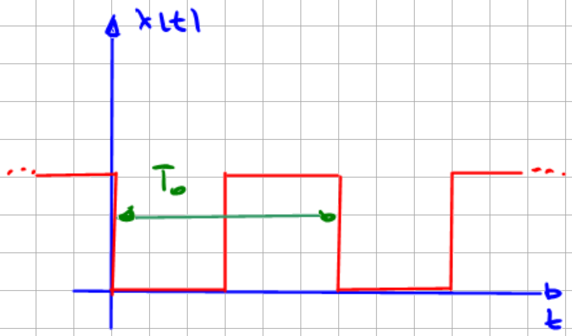
Systemtheorie: Beschreibung periodischer Vorgänge

- Sprung- und Impulsfunktion sind wichtige Testsignale, die an den Eingang eines Systems angelegt werden
  Resultierende Ausgangssignale können in vielen Fällen mit Exponentialfunktionen sowie harmonischen Schwingungen veränderlicher Amplitude beschrieben werden

- Periodische Signale

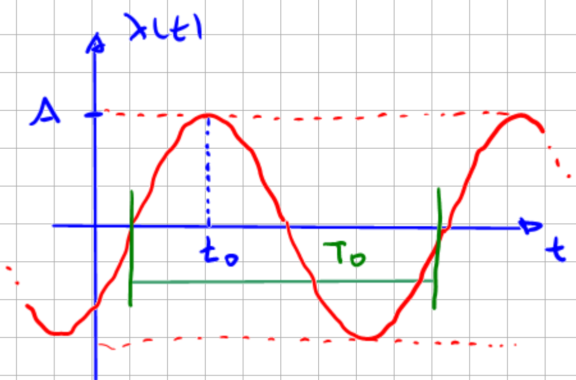


Periodendauer T_0

$$x(t) = x(t - n \cdot T_0)$$

Periodische Signale wiederholen sich nach einer festen Periodendauer T_0

- Harmonische Signale



Amplitude A

Periodendauer T_0

Kreisfrequenz $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega_0 (t - t_0)) = A \cdot \cos(\omega_0 t - \omega_0 t_0)$$

$$= A \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad \text{mit } \varphi = -\frac{2\pi}{T_0} \cdot t_0 = -\omega_0 t_0$$

Der Nullphasenwinkel φ ergibt sich aus der zeitlichen Verschiebung des Signals. Bei einem Signal mit einer festen Kreisfrequenz ω_0 können Nullphasenwinkel und Zeitverschiebung direkt ineinander umgerechnet werden.

- Harmonische Signale können mit Hilfe der Eulerschen Formel dargestellt werden

$$e^{j\varphi} = \cos(\varphi) + j\sin(\varphi)$$

$$e^{-j\varphi} = \cos(\varphi) - j\sin(\varphi)$$

Summe

$$e^{j\varphi} + e^{-j\varphi} = 2\cos(\varphi)$$

$$\cos(\varphi) = \frac{1}{2}\left(e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}\right)$$

Differenz

$$e^{j\varphi} - e^{-j\varphi} = 2j\sin(\varphi)$$

$$\sin(\varphi) = \frac{1}{2j}\left(e^{j\varphi} - e^{-j\varphi}\right)$$

Anwendung auf harmonische Schwingung

$$x(t) = A \cdot \cos\left(\omega_0 \cdot t + \varphi\right)$$

$$= \frac{A}{2} \cdot \left(e^{+j(\underline{\omega_0} \cdot t + \varphi)} + e^{-j(\underline{\omega_0} t + \varphi)}\right)$$

Vorzeichen im Exponent gibt Drehsinn an

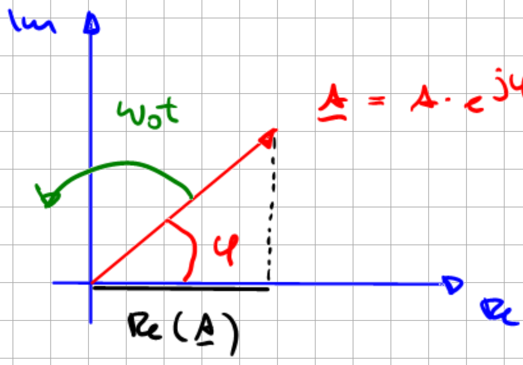
Kreisfrequenz ist immer positiv

$x(t)$ kann als Realteil eines komplexen Zeigers verstanden werden:

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi) = \mathrm{Re}\left(A \cdot e^{j\omega_0 t} \cdot e^{j\varphi}\right)$$

$$= \mathrm{Re}\left(\underline{A} \cdot e^{j\omega_0 t}\right)$$

Zeigerdarstellung



$\underline{A} = A \cdot e^{j\varphi}$

komplexer Zeiger zum Zeitpunkt $t=0$

Zeiger rotiert mit konstanter Kreisfrequenz

Probieren Sie die App komplexe Exponentialfunktion auf Systemtheorie Online aus

Realteil einer komplexen Zahl $z = a+jb$ berechnet sich aus

$$\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}\left(z + z^*\right) = \frac{1}{2}\left(a+jb + a-jb\right) = \frac{2a}{2} = a$$

Anwendung auf harmonische Schwingung

$$x(t) = \mathrm{Re}\left(A \cdot e^{j(\omega_0 t + \varphi)}\right)$$

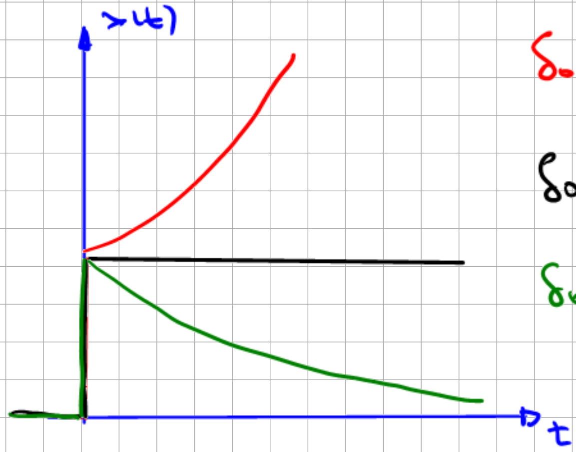
$$= \frac{1}{2} \cdot A \cdot \left(e^{j(\omega_0 t + \varphi)} + e^{-j(\omega_0 t + \varphi)}\right)$$

- kausale Exponentialfunktion zur Beschreibung des Einschwingverhaltens

$$x(t) = x_0 \cdot e^{\delta_0 \cdot t} \cdot \sigma(t)$$

x_0 ist die Amplitude zum Zeitpunkt $t=0$

δ_0 ist eine reelle Konstante, die über das Konvergenzverhalten, die über das Konvergenzverhalten entscheidet.

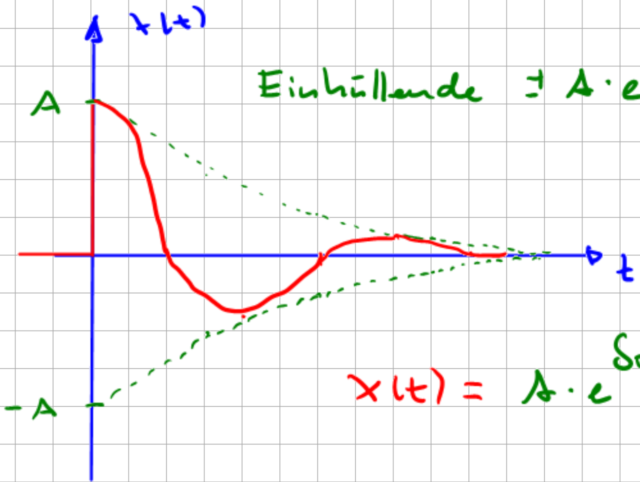


$\delta_0 > 0$: x(t) ist divergent

$\delta_0 = 0$: x(t) bleibt konstant

$\delta_0 < 0$: x(t) konvergiert gegen null

- Beschreibung einer abklingenden harmonischen Schwingung



$$x(t) = A \cdot e^{\delta_0 t} \cdot \cos(\omega_0 t) \cdot \sigma(t)$$

Kosinusfunktion kann mit der Eulerschen Formel ausgedrückt werden

$$x(t) = A \cdot e^{\delta_0 t} \cdot \frac{1}{2}\left(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}\right) \cdot \sigma(t)$$

$$= \frac{A}{2} \cdot \left(e^{\delta_0 t} \cdot e^{j\omega_0 t} + e^{\delta_0 t} \cdot e^{-j\omega_0 t}\right) \cdot \sigma(t)$$

$$= \frac{A}{2}\left(e^{(\delta_0 + j\omega_0)t} + e^{(\delta_0 - j\omega_0)t}\right) \cdot \sigma(t)$$

$$= \frac{A}{2}\left(e^{\lambda t} + e^{\lambda^* t}\right) \cdot \sigma(t)$$

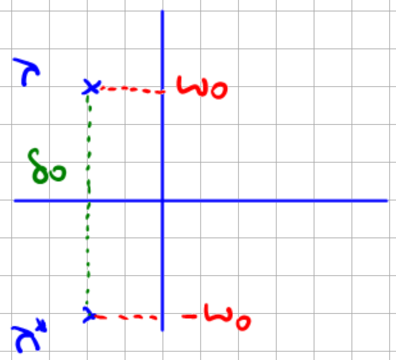
mit $\lambda = \delta_0 + j\omega_0$

Parameter λ wird später zur Interpretation von Systemeigenschaften benötigt.

$Re(\lambda) = \delta_0$: Maß für den Amplitudenverlauf

$Im(\lambda) = \omega_0$: Frequenz der harmonischen Schwingung

Beispiel:



$\delta_0 < 0$: Amplitude konvergiert gegen null

ω_0: Kreisfrequenz der Schwingung

Hausaufgabe

- Probieren Sie die App komplexe Exponentialfunktion aus
- Übungsaufgaben 2.4 Signal x_1 / 2.6 / 2.8