Systemtheorie: Impulsantwort und Superposition

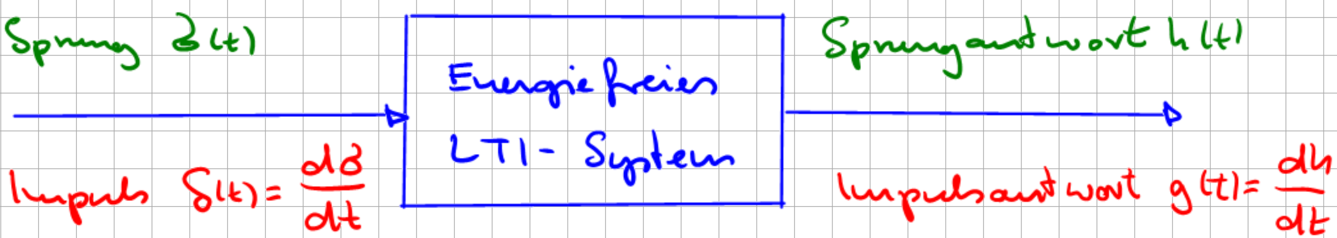
- Vier-Schritt-Methode wurde bei dem RC-Glied genutzt, um die Systemantwort auf einen Sprung $u(t) = U_E \cdot \sigma(t)$ am Eingang zu berechnen.

$$u_A(t) = \underbrace{U_E\left(1 - e^{-\frac{1}{RC}\cdot t}\right)}_{\text{Reaktion auf die Anregung des Systems}} + \underbrace{U_1 \cdot e^{-\frac{1}{RC}\cdot t}}_{\text{Reaktion auf die Anfangsbedingung}}$$

Die sogenannte Sprungantwort $h(t)$ des Systems ergibt sich aus der Sprungantwort für verschwindende Anfangsbedingungen ($U_1 = 0$) und einem Sprung der Höhe $U_E = 1$ am Eingang

$$h(t) = \left(1 - e^{-\frac{1}{R\cdot C}\cdot t}\right) \cdot \sigma(t)$$

Sind die Anfangsbedingungen null, ist in dem System keine Energie gespeichert.



Ist die Sprungantwort $h(t)$ eines LTI-Systems bekannt, können durch Superposition weitere Ausgangssignale bestimmt werden

$u_1(t) = \sigma(t)$ $\qquad$ $y_1(t) = h(t)$

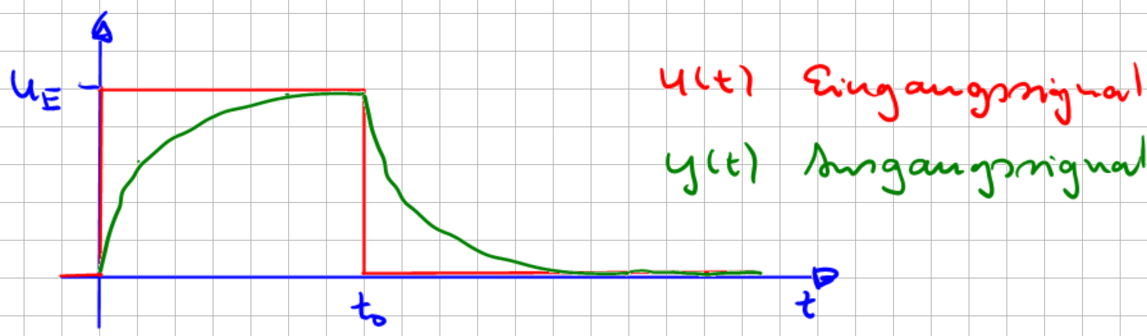
$u_2(t) = \sigma(t) - \sigma(t - t_0)$ $\qquad$ $y_2(t) = h(t) - h(t - t_0)$

Beispiel: RC-Glied

Eingangssignal $\quad u(t) = u_E \cdot \left(\sigma(t) - \sigma(t - t_0) \right)$

Ausgangssignal $\quad y(t) = u_E \left(h(t) - h(t - t_0) \right)$

$$y(t) = u_E \left(\left(1 - e^{-\frac{1}{RC} \cdot t}\right) \cdot \sigma(t) - \left(1 - e^{-\frac{1}{RC}(t - t_0)}\right) \cdot \sigma(t - t_0) \right)$$



Insbesondere gilt für den Impuls:

$$u_3(t) = \delta(t) = \frac{d\sigma}{dt} \qquad y_3(t) = g(t) = \frac{dh}{dt}$$

$g(t)$ wird Impulsantwort des Systems genannt

Beispiel: Impulsantwort des RC-Glied

$$g(t) = \frac{dh}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\left(1 - e^{-\frac{1}{RC} \cdot t}\right) \cdot \sigma(t) \right)$$

$$= +\frac{1}{RC} \cdot \left(+e^{-\frac{1}{RC} \cdot t} \right) \cdot \sigma(t) + \underbrace{\cancel{\left(1 - e^{-\frac{1}{RC} \cdot t}\right) \cdot \delta(t)}}_{=0}$$

$$= \frac{1}{RC} \cdot e^{-\frac{1}{RC} \cdot t} \cdot \sigma(t)$$

$$u_4(t) = 3 \cdot \delta(t) + 4 \cdot \delta(t - t_0) \qquad y_4(t) = 3 \cdot g(t) + 4 \cdot g(t - t_0)$$

Faktoren $\quad$ verschobene Impulse $\quad$ verschobene Impulsantworten

Eine Linearkombination von verschobenen Impulsen führt also zu derselben Linearkombination von verschobenen Impulsantworten

Ein Eingangssignal u(t) kann als Summe oder Integral von Impulsen dargestellt werden.

$$u(t) = u(t)\cdot\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\cdot\delta(t-\tau)\,d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{u(\tau)}_{\text{Faktor}}\cdot\underbrace{\delta(t-\tau)}_{\text{verschobene Impulse}}\,d\tau$$

Aus dem Integral von Impulsen am Eingang wird ein Integral von Impulsantworten am Ausgang

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{u(\tau)}_{\text{Faktor}}\cdot\underbrace{g(t-\tau)}_{\text{verschobene Impulsantworten}}\,d\tau = \overset{\text{gefaltet mit}}{u(t) * g(t)}$$

Faltungsoperation kann umgeformt werden

Spiegelung an der Achse $\tau = 0$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)\cdot g(-(\tau-t))\,d\tau$$

Verschiebung um t nach rechts

Integral des Produktes

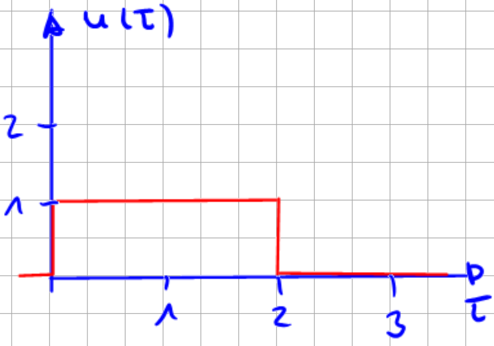
Produkt von zwei Funktionen

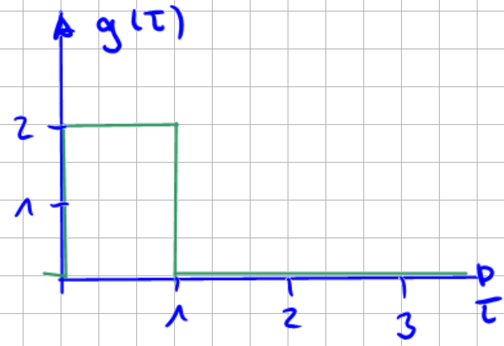
Vorgehen bei der grafischen Faltung

1. Skizzieren der Funktionen $u(\tau)$ und $g(\tau)$
2. Spiegeln der Funktion $g(\tau)$ an der Achse $\tau = 0$
3. Verschiebung der gespiegelten Funktion $g(-\tau)$ nach rechts $g(-(\tau-t))$
4. Multiplikation der beiden Funktionen $u(\tau)\cdot g(-(\tau-t))$
5. Integral des Produktes

Beispiel: $u(t) = \sigma(t) - \sigma(t-2)$ $\qquad g(t) = 2\cdot(\sigma(t) - \sigma(t-1))$

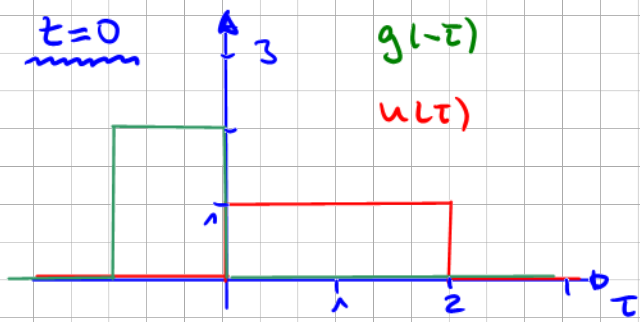
Skizzieren der Funktionen $u(\tau)$ und $g(\tau)$





Spiegeln der Funktion $g(\tau)$ an der Achse $\tau = 0$

$t=0$



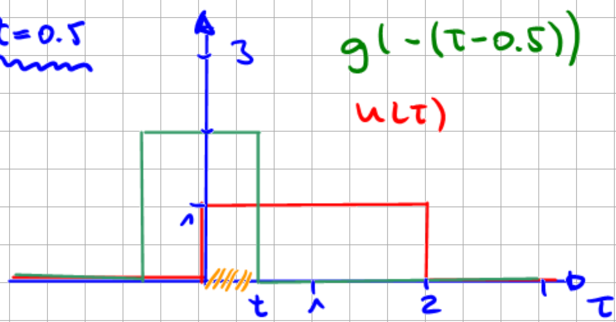
keine Verschiebung $t=0$

Produkt ist null

Integral ist null

$y(t=0) = 0$

$t=0.5$

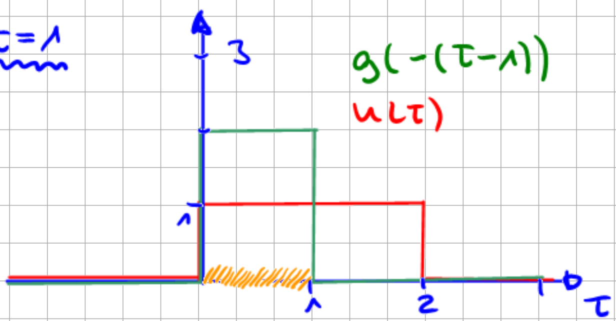


Überlappungsbereich

$$\int_0^{0.5} 1\cdot 2 \, d\tau = 2\cdot 0.5 = 1$$

$y(t=0.5) = 1$

$t=1$

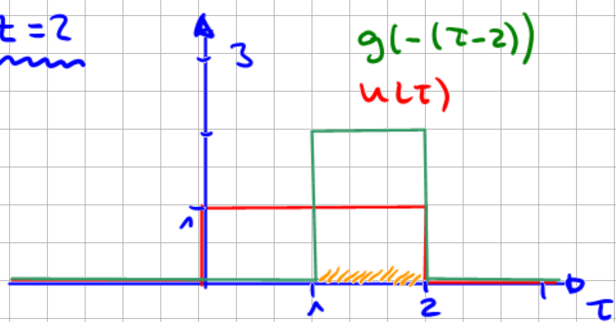


Überlappungsbereich

$$\int_0^{1} 1\cdot 2 \, d\tau = 2\cdot 1 = 2$$

$y(t=1) = 2$

$t=2$

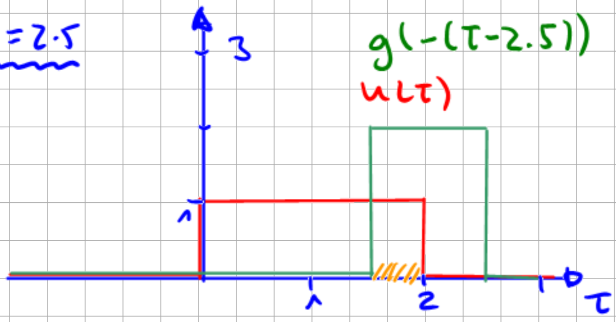


Überlappungsbereich

$$\int_1^{2} 1\cdot 2 \, d\tau = 2\cdot 1 = 2$$

$y(t=2) = 2$

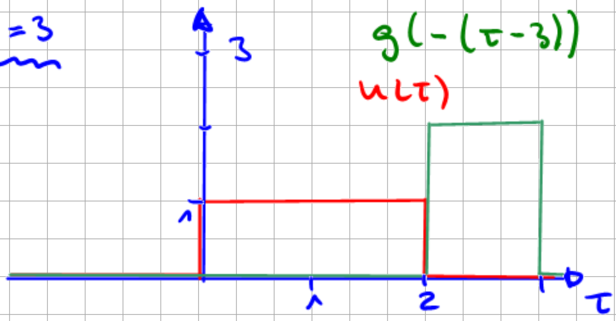
$t = 2.5$



$$\int_{1.5}^{2} 1\cdot 2 \, d\tau = 2\cdot 0.5 = 1$$

$y(t = 2.5) = 1$

$t = 3$

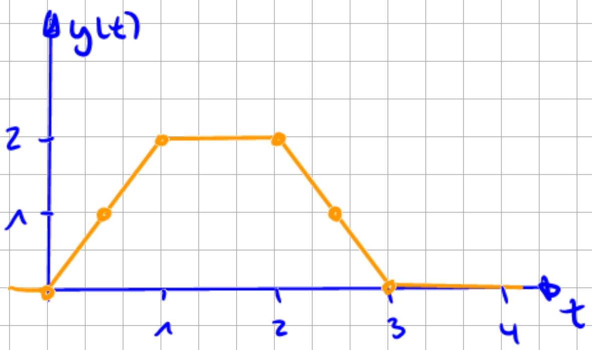


Produkt ist null

Integral ist null

$y(t = 3) = 0$

Aus den Rechnungen der einzelnen Ausgangssignale ergibt sich folgender Signalverlauf:



Linearer Anstieg am Anfang und Ende

- Hausaufgaben
  - App und Video zur kontinuierlichen Faltung auf Systemtheorie-Online
  - Übungsaufgaben in dieser Reihenfolge 3.8 / 3.7 / 3.9