Systemtheorie: Faltungsintegral

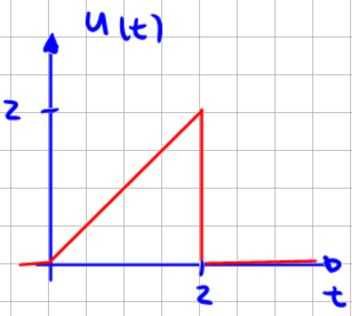
- System mit verschwindenden Anfangsbedingungen

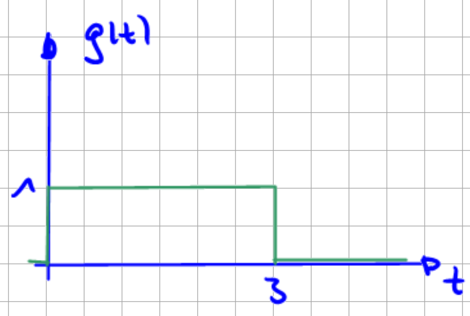
Eingangssignal $u(t)$	Ausgangssignal $y(t)$
Sprung $\sigma(t)$	Sprungantwort $h(t)$
Impuls $\delta(t) = \frac{d\sigma}{dt}$	Impulsantwort $g(t) = \frac{dh}{dt}$
$a \cdot \delta(t) + b \cdot \delta(t-t_0)$	$a \cdot g(t) + b \cdot g(t-t_0)$
$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) \cdot \delta(t-\tau)\, d\tau$	$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) \cdot g(t-\tau)\, d\tau$

- Faltungsintegral

$$y(t) = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}}_{\text{Integral}} u(\tau) \underbrace{\cdot}_{\text{Produkt}} g(\overbrace{-(\tau \underbrace{- t}_{\text{Verschiebung}})}^{\text{Spiegelung}})\, d\tau$$

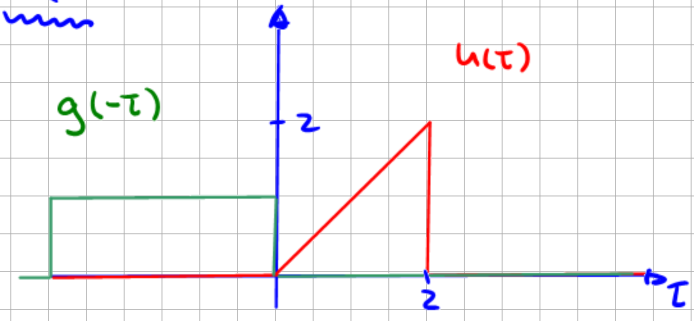
- Berechnung des Faltungsintegrals an einem Beispiel





Unterscheidung unterschiedlicher Zeiträume

$t \leq 0$

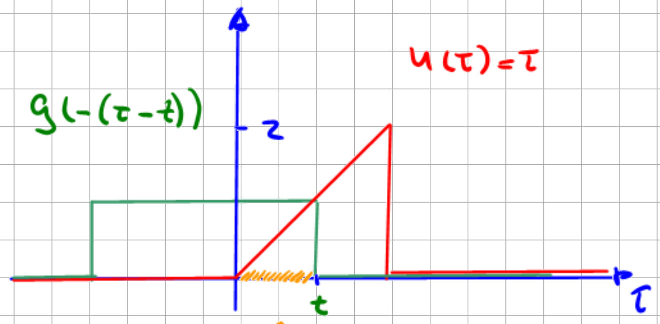


keine Überlappung

$u(\tau) \cdot g(t-\tau) = 0$

$y(t) = 0$

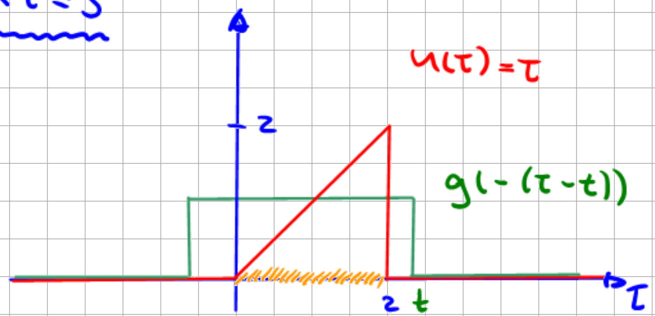
$0 < t \leq 2$



$$y(t) = \int_0^t \tau \cdot 1 \, d\tau = \frac{1}{2}\tau^2 \Big|_0^t = \frac{1}{2}t^2 - 0 = \frac{1}{2}t^2$$

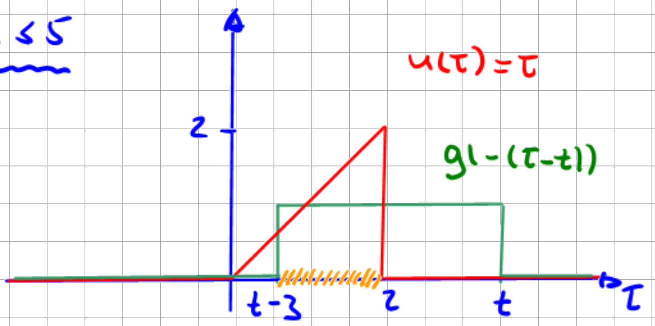
Überlappung definiert die Integrationsgrenzen

$2 < t \leq 3$



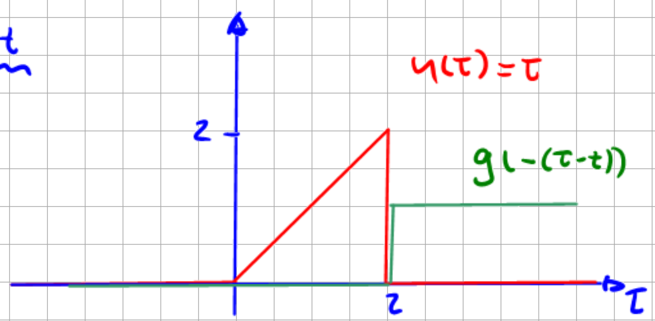
$$y(t) = \int_0^2 \tau \cdot 1 \, d\tau = \frac{1}{2}\tau^2 \Big|_0^2 = \frac{1}{2}\cdot 4 - 0 = 2$$

$3 < t \leq 5$



$$y(t) = \int_{t-3}^2 \tau \cdot 1 \, d\tau = \frac{1}{2}\tau^2 \Big|_{t-3}^2 = \frac{1}{2}\cdot 4 - \frac{1}{2}(t-3)^2 = 2 - \frac{1}{2}(t-3)^2$$

$5 < t$

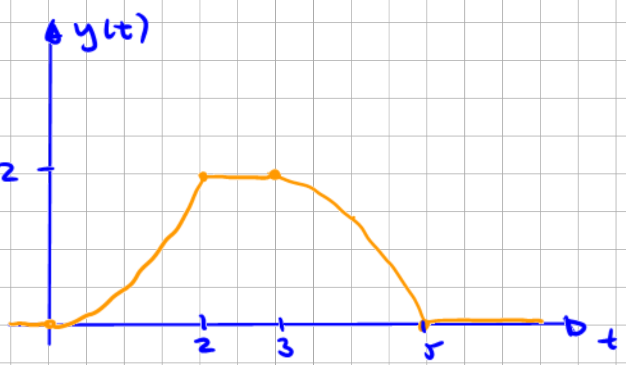


keine Überlappung

$u(\tau)\cdot g(t-\tau) = 0$

$y(t) = 0$

Damit ergibt sich $y(t)$ durch Überlagerung der Teillösungen



- Rechenregeln zur Faltungsoperation

1. Kommutativität

$u(t) * g(t) = g(t) * u(t)$

ohne Beweis, siehe App

2. Distributivität

$(u_1(t) + u_2(t)) * g(t) = u_1(t) * g(t) + u_2(t) * g(t)$

$(u_1(t) + u_2(t)) * g(t)$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (u_1(\tau) + u_2(\tau)) \cdot g(t-\tau)\, d\tau$$

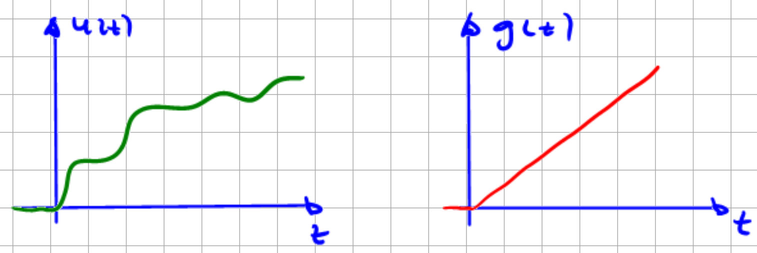
$$= \int_{-\infty}^{\infty} u_1(\tau) \cdot g(t-\tau) + u_2(\tau) \cdot g(t-\tau)\, d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} u_1(\tau) \cdot g(t-\tau)\, d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} u_2(\tau) \cdot g(t-\tau)\, d\tau =$$

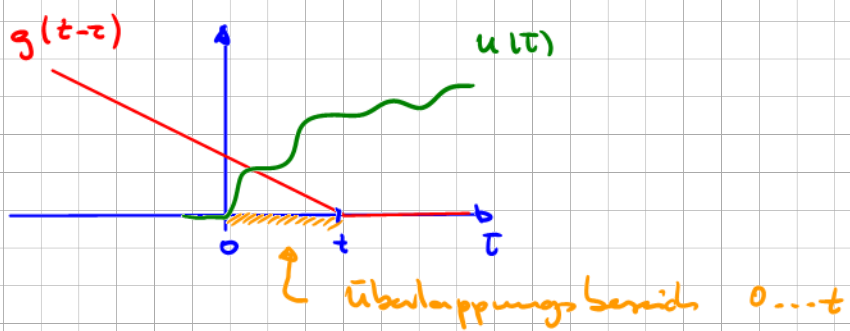
$$= u_1(t) * g(t) + u_2(t) * g(t)$$

Das entspricht dem Superpositionsprinzip...

3. Faltung kausaler Signale



$y(t) = u(t) * g(t)$



Für die Faltung kausaler Signale gilt:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)\cdot g(t-\tau)\,d\tau = \int_{0}^{t} u(\tau)\cdot g(t-\tau)\,d\tau$$

4. Faltung mit einem Impuls $\delta(t-t_0)$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau-t_0)\ x(t-\tau)\,d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau-t_0)\cdot x(t-t_0)\,d\tau$$

$$= x(t-t_0)\cdot\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau-t_0)\,d\tau = x(t-t_0)$$

Bei einer Faltung mit einem Impuls an der Stelle t_0 wird die Funktion $x(t)$ an den Ort des Impulses geschoben.

$$x(t) * \delta(t-t_0) = x(t-t_0)$$

- Beispiel: RC-Glied

Sprungantwort wurde mit der 4-Schritt-Methode bestimmt

$$h(t) = \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)\cdot\sigma(t)$$

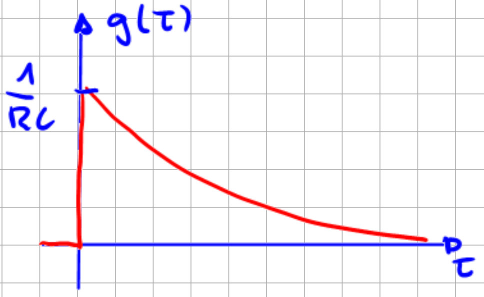
Impulsantwort ergibt sich durch Ableitung

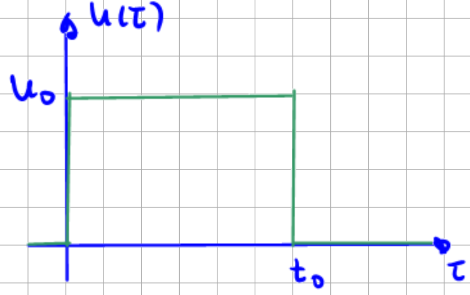
$$g(t) = \frac{dh}{dt} = \frac{1}{RC}\cdot e^{-\frac{t}{RC}}\cdot\sigma(t) + \underbrace{\cancel{\left(1-e^{-\frac{t}{RC}}\right)\cdot\delta(t)}}_{=0}$$

Faltung mit einem Rechtecksignal

$$u(t) = U_0\cdot\left(\sigma(t) - \sigma(t-t_0)\right)$$

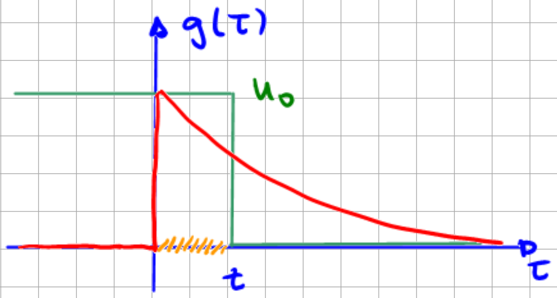
Skizze der beiden Signalverläufe:





$t<0$: Signale überlappen sich nicht $u_a(t)=0$

$0<t\le t_0$:

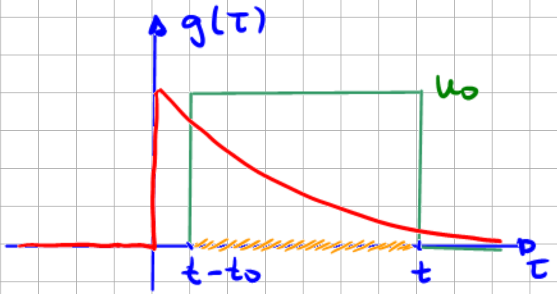


$$u_a(t)=\int_0^t U_0\cdot\frac{1}{RC}\cdot e^{-\frac{\tau}{RC}}\,d\tau$$

$$=-\frac{U_0}{\cancel{RC}}\cdot\cancel{RC}\cdot e^{-\frac{\tau}{RC}}\Big|_0^t$$

$$=U_0\left(1-e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

$t_0\le t$:



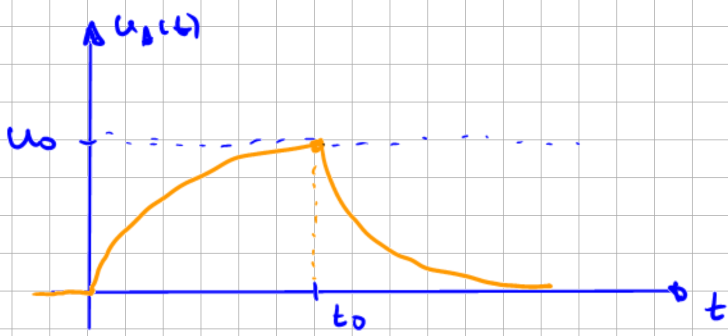
$$u_a(t)=\int_{t-t_0}^t U_0\cdot\frac{1}{RC}\cdot e^{-\frac{\tau}{RC}}\,d\tau$$

$$=-U_0\cdot e^{-\frac{\tau}{RC}}\Big|_{t-t_0}^t$$

$$=-U_0\cdot e^{-\frac{t}{RC}}+U_0\,e^{-\frac{t-t_0}{RC}}$$

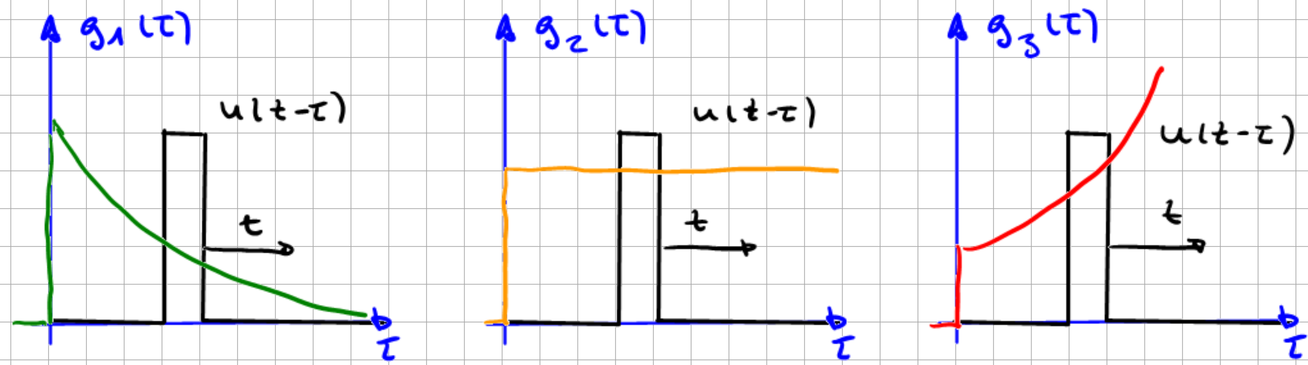
Umformung, um die Systemantwort besser zeichnen zu können:

$$u_a(t)=\underbrace{U_0\left(1-e^{-\frac{t_0}{RC}}\right)}_{u_a(t=t_0)}\cdot\underbrace{e^{-\frac{1}{RC}(t-t_0)}}_{\text{abklingende Exponentialfunktion}}$$



Mit der Faltung kann für beliebige Eingangssignale $u(t)$ das Ausgangssignal $y(t)$ berechnet werden, wenn die Impulsantwort $g(t)$ bekannt ist.

- Zusammenhang Impulsantwort und Stabilität



Anregung des Systems mit einem Signal endlicher Dauer

Verhalten des Ausgangssignals $y(t)$ ist abhängig von dem Verlauf der Impulsantwort $g(t)$:

- Impulsantwort konvergiert gegen null, Ausgangssignal geht gegen null, System ist asymptotisch stabil

- Impulsantwort bleibt konstant, Ausgangssignal bleibt konstant, System ist grenzstabil

- Impulsantwort divergiert, Ausgangssignal divergiert, System ist instabil

- Hausaufgabe Übungsaufgabe 3.9