Systemtheorie: Grundlagen der Laplace-Transformation

- Untersuchungen von LTI-Systemen im Zeitbereich führen zu drei aufwendigen, aber wichtigen Aufgaben:
  1. Lösung von Differentialgleichungen
  2. Berechnung der Faltungsoperation
  3. Beschreibung von LTI-Systemen, z.B. für die Regelungstechnik

  Mit der sogenannten Laplace-Transformation können diese drei Aufgaben effizient gelöst werden.

- Definitionsgleichung

  Zeitbereich $x(t)$

  $$X(s) = \int_{0_-}^{\infty} x(t) \cdot e^{-st} \, dt$$

  Integrationsgrenzen $t = 0_-$ und $t \to \infty$, nach der Integration kommt kein t mehr vor

  Laplace-Bereich $X(s)$, $X(s)$ hängt nicht von t ab

  Variable s ist eine komplexe Variable $s = \delta + j\omega$

  Alternative Schreibweisen $\mathcal{L}\{x(t)\} = X(s)$ oder einfach $x(t) \circ\!\!-\!\!\bullet X(s)$

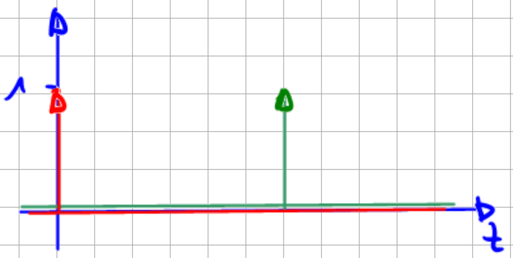
- Beispiel: Rechteckfunktion

$$x(t) = 2(t) - \delta(t - t_0)$$

$$X(s) = \int_{0_-}^{\infty} x(t) \cdot e^{-st} \, dt = \int_{0_-}^{t_0} 2 \cdot e^{-st} \, dt = \frac{2}{-s} \cdot e^{-st} \Big|_{0_-}^{t_0}$$

$$= -\frac{2}{s}\cdot\left(e^{-st_0} - 1\right) = \frac{2}{s}\cdot\left(1 - e^{-st_0}\right)$$

- Beispiel: Impulsfunktion



$x_1(t) = \delta(t)$

$x_2(t) = \delta(t - t_0)$

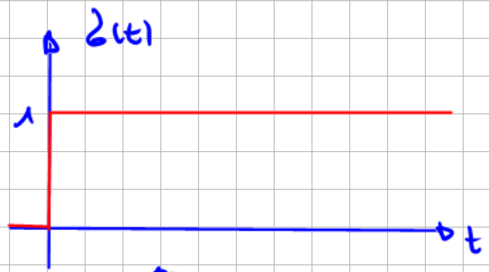
$$X_1(s) = \int_{0_-}^{\infty} \delta(t)\cdot e^{-st}\,dt = e^{-s\cdot 0}\cdot \int_{0_-}^{\infty} \delta(t)\,dt = 1$$

Impuls geht von 0_- bis 0_+, ist also in diesem Integral enthalten...

$$X_2(s) = \int_{0_-}^{\infty} \delta(t-t_0)\cdot e^{-st}\,dt = e^{-st_0}\cdot \int_{0_-}^{\infty} \delta(t-t_0)\,dt = e^{-st_0}$$

Ausblendeigenschaft...

- Beispiel: Sprungfunktion



$$X(s) = \int_{0_-}^{\infty} \sigma(t)\, e^{-st}\,dt = \int_{0_-}^{\infty} 1\cdot e^{-st}\,dt = -\frac{1}{s}\cdot e^{-st}\Big|_{0_-}^{\infty}$$

$$= \underbrace{\lim_{t\to\infty} -\frac{1}{s}\cdot e^{-st}}_{\substack{=0 \text{ für } \mathrm{Re}(-s)<0 \\ \text{bzw. für } \mathrm{Re}(s)>0}} + \frac{1}{s}\cdot \underbrace{\cancel{e^{-s\cdot 0}}}_{=1} = \frac{1}{s}$$

Hinweis: $e^{-st} = e^{-(\delta + j\omega)t} = \underbrace{e^{-\delta t}}_{\text{Reelle Exponentialfunktion, geht für } \delta>0 \text{ gegen null...}} \cdot \underbrace{e^{-j\omega t}}_{\text{Rotierender Zeiger, Länge konstant 1}}$

Damit besitzt die Korrespondenz $\delta(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s}$ die Konvergenzbedingung $\mathrm{Re}(s) > 0$

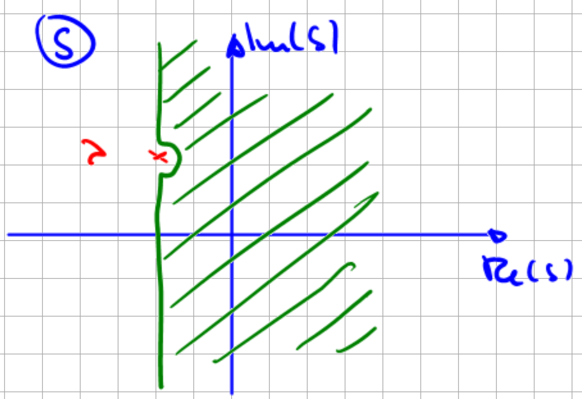
- Beispiel: kausale Exponentialfunktion

$$x(t) = e^{\lambda t} \cdot \delta(t)$$

$$X(s) = \int_{0-}^{\infty} e^{\lambda t} \cdot e^{-st} \, dt = \int_{0-}^{\infty} e^{(\lambda - s) \cdot t} \, dt = \frac{1}{\lambda - s} \cdot e^{(\lambda - s) t} \Big|_{0}^{\infty}$$

$$= \underbrace{\lim_{t \to \infty} \frac{1}{\lambda - s} \cdot e^{(\lambda - s) t}}_{= 0 \text{ für } \mathrm{Re}(\lambda - s) < 0} - \frac{1}{\lambda - s} = \frac{1}{s - \lambda}$$

Korrespondenz $e^{\lambda t} \cdot \delta(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s - \lambda}$ weist einen Konvergenzbereich von $\mathrm{Re}(\lambda - s) < 0$ auf



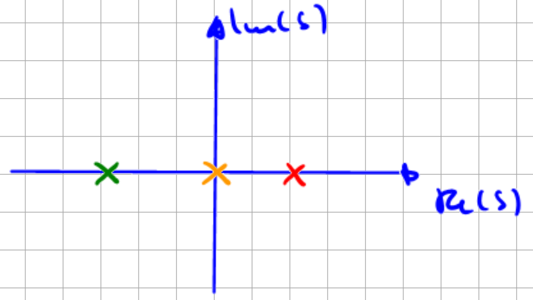
Konvergenzbereich
$\mathrm{Re}(\lambda - s) < 0$

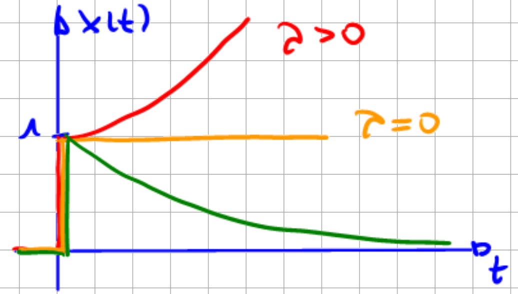
Bei gutmütigen Signalen existiert immer ein Konvergenzbereich, er wird erst später wichtig, wenn die sogenannte Fourier-Transformation eingeführt wird...

Zusammenhang zwischen Pollage und Verhalten der zugehörigen Zeitfunktion

$$\frac{1}{s - \lambda} \bullet\!\!-\!\!\circ e^{\lambda t} \cdot \delta(t)$$

Diskussion für reelles λ





Pollage entscheidet über Konvergenzverhalten.

- Beispiel: Harmonische Schwingung mit veränderlicher Amplitude

$$x(t) = e^{\delta_0 t} \cdot \cos(\omega_0 t) \cdot \sigma(t)$$

Berechnung der entsprechenden Laplace-Transformierten:

$$X(s) = \int_0^\infty e^{\delta_0 t} \cdot \cos(\omega_0 t) \cdot e^{-st}\, dt$$

$$= \int_0^\infty e^{\delta_0 t} \cdot \frac{1}{2}\left(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t} \right) \cdot e^{-st}\, dt$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \int_0^\infty e^{(\delta_0 + j\omega_0 - s)t} + e^{(\delta_0 - j\omega_0 - s)t}\, dt$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\delta_0 + j\omega_0 - s} \cdot e^{(\delta_0 + j\omega_0 - s)t} \Big|_0^\infty$$

$$+ \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\delta_0 - j\omega_0 - s} \cdot e^{(\delta_0 - j\omega_0 - s)t} \Big|_0^\infty$$

Mit der Konvergenzbedingung $Re(\delta_0 - s) < 0$ gilt:

$$X(s) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\delta_0 + j\omega_0 - s} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\delta_0 - j\omega_0 - s}$$

$$= \cancel{\frac{1}{2}} \cdot \frac{s - \delta_0 + \cancel{j\omega_0} + s - \delta_0 - \cancel{j\omega_0}}{(s - \delta_0 - j\omega_0)(s - \delta_0 + j\omega_0)}$$

$$X(s) = \frac{s-\delta_0}{(s-\delta_0-j\omega_0)(s-\delta_0+j\omega_0)}$$

$$= \frac{s-\delta_0}{(s-\delta_0)^2+\omega_0^2}$$

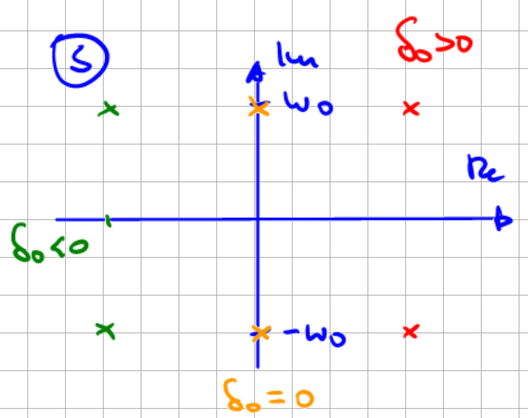
Pole der Laplace-Transformierten sind $\alpha = \delta_0 + j\omega_0$ und $\alpha^* = \delta_0 - j\omega_0$

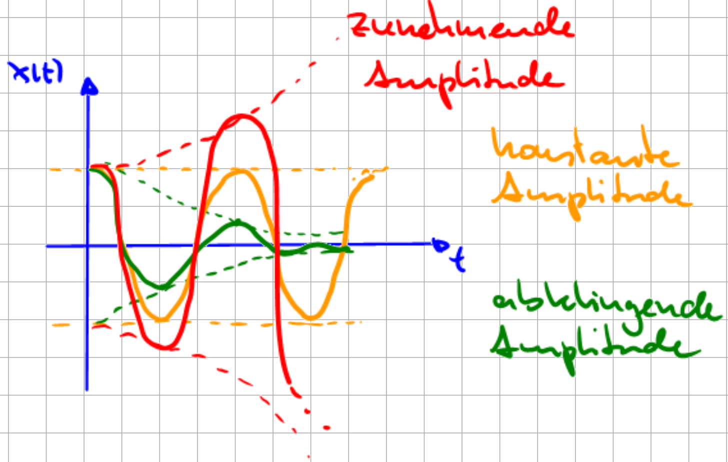
Zusammenhang zwischen Zeitfunktion

$$x(t) = e^{\delta_0 t} \cdot \cos(\omega_0 t) \cdot \sigma(t)$$

und der Laplace-Transformierten

$$X(s) = \frac{s-\delta_0}{(s-\delta_0-j\omega_0)(s-\delta_0+j\omega_0)}$$





- Hausaufgabe: $x(t) = t \cdot \sigma(t)$

  a) Funktion zeichnen

  b) $X(s)$ ausrechnen, Konvergenzbereich angeben

  c) Pole von $X(s)$ zeichnen