Systemtheorie: Eigenschaften der Laplace-Transformation

- Definition der Laplace-Transformation

$$X(s) = \int_{0-}^{\infty} x(t)\cdot e^{-st}\,dt$$

erlaubt die Berechnung einiger Korrespondenzen

$$\left.\begin{aligned}
\delta(t) &\circ\!\!-\!\!\bullet\; 1\\
\varepsilon(t) &\circ\!\!-\!\!\bullet\; \frac{1}{s}\\
e^{\lambda t}\cdot\varepsilon(t) &\circ\!\!-\!\!\bullet\; \frac{1}{s-\lambda}\\
&\;\vdots
\end{aligned}\right\}\ \text{Korrespondenzen } x(t) \circ\!\!-\!\!\bullet X(s)$$

Die Rechnung über das Laplace-Integral ist jedoch aufwendig, deshalb werden Rechenregeln aufgestellt, mit denen die Bestimmung von Korrespondenzen vereinfacht wird.

- Rechenregeln der Laplace-Transformation

1. Linearität

$$a\cdot x_1(t) + b\cdot x_2(t) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; a\cdot X_1(s) + b\cdot X_2(s)$$

Beweis: $\displaystyle\int_{0-}^{\infty}\big(a\cdot x_1(t) + b\cdot x_2(t)\big)\cdot e^{-st}\,dt$

$$= a\cdot\int_{0-}^{\infty}\cancel{a}\cdot x_1(t)\cdot e^{-st}\,dt + b\cdot\int_{0-}^{\infty}\cancel{b}\cdot x_2(t)\cdot e^{-st}\,dt$$

$$= a\cdot X_1(s) + b\cdot X_2(s)$$

Anwendung:

$$x(t) = \sin(\omega_0\cdot t)\cdot\varepsilon(t) = \frac{1}{2j}\cdot\left(e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}\right)\cdot\varepsilon(t)$$

$$= \frac{1}{2j} \cdot e^{j\omega_0 t} \cdot \sigma(t) - \frac{1}{2j} \cdot e^{-j\omega_0 t} \cdot \sigma(t)$$

Mit der bekannten Korrespondenz $e^{\lambda t} \cdot \sigma(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s-\lambda}$

$$X(s) = \frac{1}{2j} \cdot \frac{1}{s - j\omega_0} - \frac{1}{2j} \cdot \frac{1}{s + j\omega_0}$$

$$= \frac{1}{2j} \cdot \frac{\cancel{s} + j\omega_0 - \cancel{s} + j\omega_0}{s^2 + \omega_0^2} = \frac{1}{\cancel{2j}} \cdot \frac{\cancel{2j}\omega_0}{s^2 + \omega_0^2} = \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$$

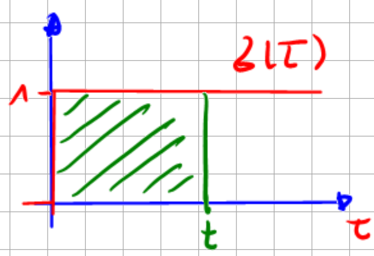
2. Integrationsregel

$$\int_0^t x(\tau)\, d\tau \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s} \cdot X(s)$$

Anwendung:

$$x(t) = t \cdot \sigma(t) = \int_0^t \sigma(\tau)\, d\tau$$

$$X(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{s^2}$$



3. Verschiebungsregel

$x(t) \circ\!\!-\!\!\bullet X(s)$ $\qquad$ $x(t-t_0) \circ\!\!-\!\!\bullet X(s) \cdot e^{-st_0}$

Beweis: $\int_{0-}^{\infty} x(t-t_0) \cdot e^{-st}\, dt$ $\quad$ mit $\tau = t - t_0$ $\quad \frac{d\tau}{dt} = 1$

$$= \int_{-t_0}^{\infty} x(\tau) \cdot e^{-s\cdot(\tau + t_0)}\, d\tau = e^{-st_0} \cdot \int_{\cancel{-t_0} = 0_-}^{\infty} x(\tau) \cdot e^{-s\tau}\, d\tau$$

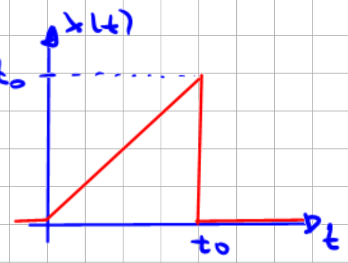
$$= e^{-st_0} \cdot X(s)$$ bei kausalen Signalen

Anwendung: Rechteck-Signal

$x(t) = \sigma(t) - \sigma(t - t_0)$ $\qquad$ mit $\sigma(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s}$

$$X(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s} \cdot e^{-st_0} = \frac{1}{s} \cdot \left(1 - e^{-st_0}\right)$$

Anwendung: Sägezahn



$$x(t) = t \cdot \left(\sigma(t) - \sigma(t-t_0) \right)$$

$$= t \cdot \sigma(t) - \underbrace{t \cdot \sigma(t-t_0)}_{\text{unterschiedliche Zeitargumente } ↯}$$

Lösung:

$$x(t) = t \cdot \sigma(t) - \underbrace{(t-t_0) \cdot \sigma(t-t_0)}_{\text{gleiche Zeitargumente}} - \underbrace{t_0 \cdot \sigma(t-t_0)}_{\text{Korrektur}}$$

$$X(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2} \cdot e^{-st_0} - t_0 \cdot \frac{1}{s} \cdot e^{-st_0}$$

Verschiebungsregel gilt nur, wenn <u>alle</u> Zeitargumente innerhalb des Summanden gleich sind

4. Ableitungsregel

$$\frac{dx}{dt} = s \cdot X(s) - x(0_-)$$

Beweis über partielle Integration:

$$\int_{0_-}^{\infty} \frac{dx}{dt} \cdot e^{-st} \, dt = x(t) \cdot e^{-st} \Big|_{0_-}^{\infty} + s \cdot \int_{0_-}^{\infty} x(t) \cdot e^{-st} \, dt$$

$$= \underbrace{\lim_{t \to \infty} x(t) \cdot e^{-st}}_{= 0 \text{ für } Re(s) > 0} - x(0_-) + s \cdot X(s)$$

$$= s \cdot X(s) - x(t = 0_-)$$

Wichtige Rechenregel zur Lösung von Differentialgleichungen mit Anfangsbedingung

$$u_A(t) + RC \cdot \frac{du_A}{dt} = u_E(t)$$

mit $u_A(t = 0_-) = u_{A0}$

und $u_E(t) = u_0 \cdot \sigma(t)$

$$U_A(s) + RC\cdot\left(s\cdot U_A(s) - u_A(t=0_-)\right) = U_0\cdot\frac{1}{s}$$

Auflösen nach $U_A(s)$

$$U_A(s)\left(1+RCs\right) = \frac{U_0}{s} + RC\cdot U_{A0}$$

$$U_A(s) = \underbrace{\frac{U_0}{s(1+RCs)}}_{} + \underbrace{\frac{RC\cdot U_{A0}}{1+RCs}}_{}$$

Korrespondenz #12 Korrespondenz #10

$$u_A(t) = U_0\left(1-e^{\frac{1}{RC}\cdot t}\right)\cdot\sigma(t) + \frac{1}{\cancel{RC}}\cdot e^{-\frac{t}{RC}}\cdot\sigma(t)\cdot U_{A0}\cdot\cancel{RC}$$

Zur Lösung von Differentialgleichungen später mehr...

5. Faltungsregel

$$y(t) = g(t) * u(t) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; G(s)\cdot U(s) = Y(s)$$

Anwendung:

$$g(t) = \frac{1}{RC}\cdot e^{-\frac{t}{RC}}\cdot\sigma(t) \qquad u(t) = \sigma(t) - \sigma(t-t_0)$$

Korr. #10 siehe oben

$$G(s) = \frac{1}{1+RCs} \qquad U(s) = \frac{1}{s}\left(1-e^{-st_0}\right)$$

$$Y(s) = G(s)\cdot U(s) = \frac{1}{1+RCs}\cdot\frac{1}{s} - \frac{1}{1+RCs}\cdot\frac{1}{s}\cdot e^{-st_0}$$

mit Korr. #12 und Verschiebungsregel

$$y(t) = \left(1-e^{-\frac{t}{RC}}\right)\cdot\sigma(t) - \left(1-e^{-\frac{1}{RC}(t-t_0)}\cdot\sigma(t-t_0)\right)$$

6. Endwertsatz

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{s\to 0} s\cdot X(s)$$ falls der Grenzwert existiert

Anwendung:

$$x(t) = \left(1 - e^{-\frac{1}{RC}\cdot t}\right)\cdot \sigma(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s\cdot(1+RCs)} = X(s)$$

$$\lim_{t\to\infty} \left(1 - \underbrace{e^{-\frac{1}{RC}\cdot t}}_{=0}\right)\cdot\sigma(t) = 1$$

$$\lim_{s\to 0} \cancel{s}\cdot\frac{1}{\cancel{s}\cdot(1+RC\underbrace{s}_{=0})} = 1$$

gleiches Ergebnis

- Weitere Rechenregeln und Anwendungen siehe Skript, tabellarische Zusammenstellung in Formelsammlung, Zusammenstellung der bekannten Korrespondenzen in Formelsammlung

  Formelsammlung darf in der Klausur verwendet werden!

- Hausaufgabe: Übungsaufgaben 4.2/4.4/4.5