Systemtheorie: Grundlagen der Fourier-Transformation

- komplexe Fourier-Reihe zur Beschreibung periodischer Signale im Frequenzbereich

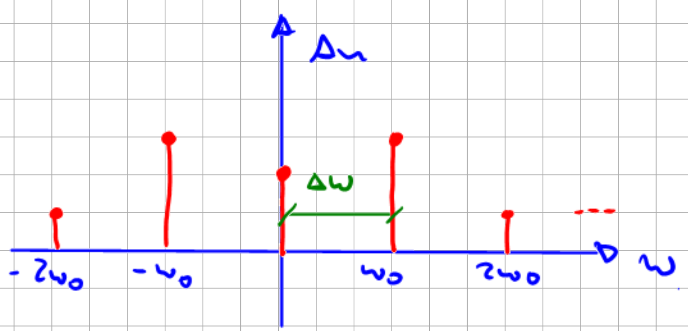
$$x(t) \approx \sum_{n=-N}^{N} A_n \cdot e^{j n \cdot \omega_0 t} \qquad \text{mit } \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

$$A_n = |A_n| \cdot e^{j\varphi_n}$$

Nullphasenwinkel der Schwingung (zeitliche Ausrichtung)

Amplitude der Schwingung mit der Frequenz $n \cdot \omega_0$

Spektren periodischer Signale sind diskret und nur an den Stellen $n \cdot \omega_0$ von null verschieden



$$\Delta\omega = \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

- Fourier-Transformation erlaubt die Bestimmung des Spektrums nicht periodischer Signale, Ausgangspunkt zur Herleitung ist die Fourier-Reihe, Idee: ein Signal, das sich erst nach einer unendlich langen Zeit T_0 wiederholt, ist gar nicht periodisch...

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \cdot e^{j n \cdot \omega_0 \cdot t}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_0} \cdot \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) \cdot e^{-j n \omega_0 t} \, dt \cdot e^{j n \omega_0 t}$$

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{\Delta\omega}$$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) \cdot e^{-jn\cdot\omega_0\cdot t}\, dt \cdot e^{jn\omega_0 t} \cdot \Delta\omega$$

Grenzwertbetrachtung: Was ändert sich für $T_0 \to \infty$

Abstand $\Delta\omega$ wird unendlich klein: $\Delta\omega \to d\omega$

Diskrete Frequenz $n\cdot\omega_0$ wird kontinuierlich $n\cdot\omega_0 \to \omega$

Summe geht in ein Integral über

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t}\, dt}_{\text{Spektrum } X(\omega)} \cdot e^{j\omega t}\, d\omega$$

Daraus ergibt sich die Fourier-Transformation

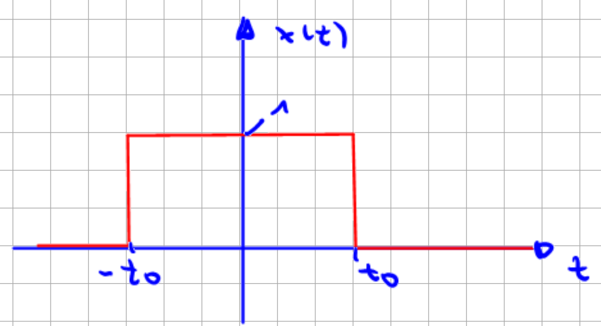
$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t}\, dt$$

Sie ordnet einem Signal $x(t)$ das zugehörige Spektrum $X(\omega)$ zu, die Bedeutung ist ähnlich der Bedeutung der Fourier-Koeffizienten A_n, es gibt die Amplituden und die Nullphasenwinkel der am Signal beteiligten Schwingungen an.

Die inverse Fourier-Transformation zeigt, wie aus dem Spektrum das Zeitsignal bestimmt werden kann

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \cdot e^{j\omega t}\, d\omega$$

Beispiel Rechteckfunktion



$x(t) = \sigma(t+t_0) - \sigma(t-t_0)$

Signal ist nicht periodisch

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\cdot e^{-j\omega t}\,dt = \int_{-t_0}^{t_0} 1\cdot e^{-j\omega t}\,dt$$

Sprungfunktionen führen zu endlichen Grenzen

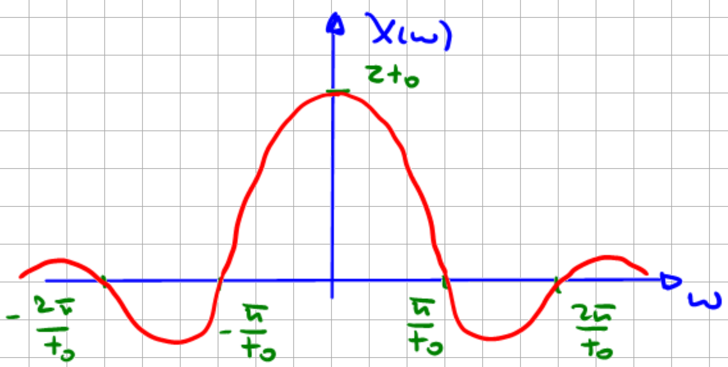
$$= \frac{1}{-j\omega}\cdot e^{-j\omega t}\Big|_{-t_0}^{t_0}$$

$$= + \frac{1}{j\omega}\cdot\left(-e^{-j\omega t_0} + e^{j\omega t_0}\right)$$

$$= \frac{2\cancel{j}\sin(\omega t_0)}{\cancel{j}\omega} = 2\cdot t_0 \frac{\sin(\omega t_0)}{\omega\cdot t_0}$$

Ergänzung zu einer $\frac{\sin(x)}{x}$ Funktion

Skizze des Spektrums



$X(0) = 2\cdot t_0\cdot\frac{\sin(0)}{0} = 2t_0$

Nulldurchgänge:

$\omega\cdot t_0 = n\cdot\pi$

$\omega = \frac{n\cdot\pi}{t_0}$

Je breiter das Zeitsignal ist, desto größer ist t_0 und desto näher liegen die Nulldurchgänge beieinander.

Beispiel Impulsfunktion $x(t) = \delta(t)$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\cdot e^{-j\omega t}\,dt = e^{-j\omega\cdot 0}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\,dt = 1$$

Signal ist im Zeitbereich unendlich schmal und im Frequenzbereich unendlich breit, ein Impuls eignet sich deshalb besonders gut als Testsignal, er regt an allen Frequenzen gleich stark an...

Beispiel kausale Exponentialfunktion

$$x(t) = e^{\lambda t} \cdot \underline{\delta(t)}$$

Sprungfunktion bestimmt Grenze...

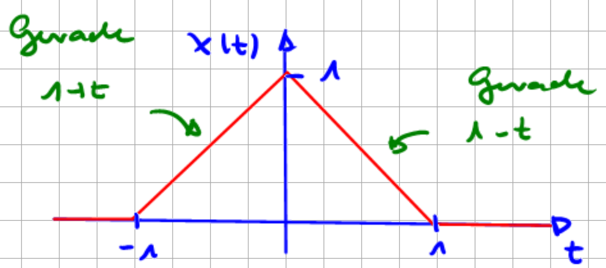
$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t}\, dt = \int_{\underline{0}}^{\infty} e^{\lambda t} \cdot e^{-j\omega t}\, dt$$

$$= \int_0^{\infty} e^{(\lambda - j\omega)t}\, dt = \frac{1}{\lambda - j\omega} \cdot e^{(\lambda - j\omega)t} \Big|_0^{\infty}$$

$$= \underbrace{\lim_{t \to \infty} \frac{1}{\lambda - j\omega} \cdot e^{(\lambda - j\omega)t}}_{=0 \text{ für } \mathrm{Re}(\lambda - j\omega) < 0} - \frac{1}{\lambda - j\omega} = \frac{1}{j\omega - \lambda}$$

Fourier-Integral konvergiert nur für λ-Werte, die einen negativen Realteil aufweisen.

Berechnung der Fourier-Transformierten $X(\omega)$ wird bei komplizierten Signalen $x(t)$ aufwendig...



$$\int t \cdot e^{at}\, dt = \frac{at-1}{a^2} \cdot e^{at}$$

$$X(\omega) = \int_{-1}^{0} (1+t) \cdot e^{-j\omega t}\, dt + \int_0^1 (1-t) \cdot e^{-j\omega t}\, dt$$

$$= \int_{-1}^{1} e^{-j\omega t}\, dt + \int_{-1}^{0} t \cdot e^{-j\omega t}\, dt - \int_0^1 t \cdot e^{-j\omega t}\, dt$$

$$= \frac{1}{-j\omega} \cdot e^{-j\omega t}\Big|_{-1}^{1} + \frac{+j\omega t+1}{+\omega^2} \cdot e^{-j\omega t}\Big|_{-1}^{0} - \frac{+j\omega t+1}{+\omega^2} \cdot e^{-j\omega t}\Big|_{0}^{1}$$

$$= \frac{1}{+j\omega} \cdot \left(-e^{-j\omega} + e^{j\omega}\right) + \frac{1}{\omega^2} - \frac{-j\omega+1}{\omega^2} \cdot e^{j\omega}$$

$$- \frac{j\omega+1}{\omega^2} \cdot e^{-j\omega} + \frac{1}{\omega^2}$$

$$= \frac{2 \cdot \sin(\omega)}{\omega} + \frac{1}{\omega^2} + \frac{j\omega}{\omega^2} \cdot e^{j\omega} - \frac{1}{\omega^2} \cdot e^{j\omega}$$

$$- \frac{j\omega}{\omega^2} \cdot e^{-j\omega} - \frac{1}{\omega^2} \cdot e^{-j\omega} + \frac{1}{\omega^2}$$

$$= \cancel{\frac{2 \cdot \sin(\omega)}{\omega}} + \frac{2}{\omega^2} + \cancel{\frac{-\cancel{j}}{\omega} \cdot 2\cancel{j}\sin(\omega)} - \frac{1}{\omega^2} \cdot 2 \cdot \cos(\omega)$$

$$= \frac{2}{\omega^2}\left(1 - \cos(\omega)\right) = \frac{4}{\omega^2} \cdot \sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

Um die Fourier-Transformierten von komplizierten Signalen $x(t)$ zu berechnen, werden deshalb Rechenregeln eingeführt, mit denen eine komplizierte Aufgabe auf mehrere kleinere Aufgaben zurückgeführt werden kann.

- Hausaufgabe: Übungsaufgabe 6.2 und 6.3 a+b