Systemtheorie: Eigenschaften der Fourier-Transformation

- Zusammenfassung Fourier-Transformation

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t}\, dt$$

„Fourier-Koeffizienten für nicht periodische Signale

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \cdot e^{j\omega t}\, d\omega$$

$X(\omega)$ ist das Spektrum des Signals $x(t)$, also die Darstellung des Signals im Frequenzbereich

- Konvergenz des Fourier-Integrals

Damit das Spektrum bestimmt werden kann, muss das Fourier-Integral ausgewertet werden und damit konvergieren, wann ist das der Fall?

$$|X(\omega)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |x(t) \cdot e^{-j\omega t}|\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| \cdot \underbrace{\cancel{|e^{-j\omega t}|}}_{=1}\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|\, dt = X_{\infty} < \infty$$

Abschätzung führt zu der hinreichenden Bedingung, dass die Funktion absolut integrierbar sein muss

Sonderfälle:

1. Für beidseitig begrenzte Signale mit endlicher Amplitude ist das Fourier-Integral konvergent, z.B. Rechtecksignal

2. Für kausale Signale, die mit einer abfallenden Exponentialfunktion nach oben abgeschätzt werden können, ist das Fourier-Integral konvergent

$$x(t) \leq M \cdot e^{\delta \cdot t} \cdot \varepsilon(t) \quad \text{mit } \delta < 0$$

Beide Bedingungen führen dazu, dass die Energie der Signale begrenzt ist: Energiesignale

$$0 \leq \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \, dt \leq \infty$$

Problem: Sprungfunktionen und harmonische Signale gehören nicht dazu, es sind Leistungssignale

Leistungssignale haben folgende Eigenschaft

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \cdot \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 \, dt < \infty$$

Sie zeichnen sich dadurch aus, dass sie eine begrenzte Amplitude aufweisen, aber nicht beidseitig begrenzt sind, z.B. Sprungfunktion, Cosinus-Funktion, ...

Korrespondenz $x(t) \circ\!\!-\!\!\bullet X(\omega)$ wird in dem Fall über die inverse Fourier-Transformation bestimmt

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \cdot e^{j\omega t} \, d\omega$$

Für $X(\omega)$ wird eine Vermutung aufgestellt und dann geprüft

Beispiel $x(t) = 1 = 1 \cdot e^{j \cdot 0 \cdot t}$

$x(t)$ ist ein Leistungssignal, denn es gilt

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \cdot \int_{-T/2}^{T/2} |1|^2 \, dt = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \cdot T = 1 < \infty$$

Vermutung $Y(\omega) = \delta(\omega)$, da das Signal $x(t)$ konstant ist und damit keine zeitliche Veränderung aufweist

$$2\pi \cdot y(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} 2\pi\, \delta(\omega)\cdot e^{j\omega t}\, d\omega = \frac{1}{2\pi}\cdot e^{j0t}\cdot \int_{-\infty}^{\infty}\delta(\omega)\, d\omega \cdot 2\pi$$

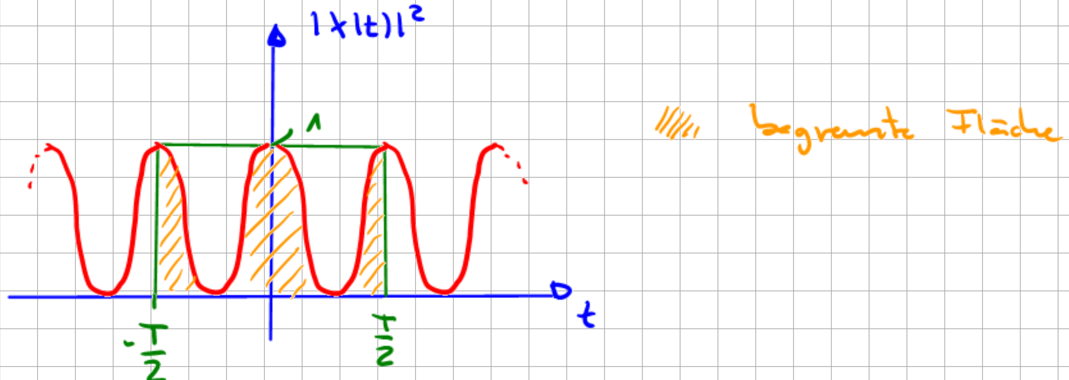
$$= \frac{1}{2\pi}\cdot 2\pi$$

Damit sich das Zeitsignal $x(t)=1$ ergibt, muss die Gleichung mit 2π multipliziert werden. Damit gilt:

$$x(t) = 1 \circ\!\!-\!\!\bullet\; X(\omega) = 2\cdot\pi\cdot\delta(\omega)$$

Beispiel $x(t) = \cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2}\left(+e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}\right)$

$x(t)$ ist ein Leistungssignal, denn es gilt:



$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\cos^2(\omega_0 t)\, dt \leq \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\cdot\int_{-T/2}^{T/2} 1\, dt$$

$$= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\cdot T = 1 < \infty$$

Vermutung $Y(\omega) = +\delta(\omega+\omega_0) + \delta(\omega-\omega_0)$, weil sich die Cosinusfunktion mit Hilfe der Eulerschen Formel darstellen lässt und beide Exponentialfunktionen dasselbe Vorzeichen aufweisen

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \pi \cdot \left(\delta(\omega+\omega_0) + \delta(\omega-\omega_0)\right) \cdot e^{j\omega t} \, d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \pi \cdot \delta(\omega+\omega_0) \cdot e^{j\omega t} \, d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \pi \cdot \delta(\omega-\omega_0) \cdot e^{j\omega t} \, d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot e^{-j\omega_0 t} \cdot \pi \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega+\omega_0) \, d\omega + \frac{1}{2\pi} e^{j\omega_0 t} \cdot \pi \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega-\omega_0) \, d\omega$$

$$= \frac{1 \cdot \pi}{2\pi} \cdot \left(e^{-j\omega_0 t} + e^{j\omega_0 t} \right) = \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}\pi} \cdot \cos(\omega_0 t) \cdot \pi$$

Mit einer Korrektur um π ergibt sich die gesuchte Korrespondenz

$$x(t) = \cos(\omega_0 t) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; X(\omega) = \pi \cdot \left(\delta(\omega+\omega_0) + \delta(\omega-\omega_0) \right)$$

- Dualität im Zeit- und Frequenzbereich

Fourier-Transformation und inverse Fourier-Transformation weisen eine formelle Ähnlichkeit auf

$$\left. \begin{aligned} X(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t} \, dt \\ x(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \cdot e^{+j\omega t} \, d\omega \end{aligned} \right\} \text{formelle Ähnlichkeit} \ldots$$

Zu einer bekannten Korrespondenz $x(t) \circ\!\!-\!\!\bullet X(\omega)$ gibt es eine duale Korrespondenz

$$y(t) = X(\omega)\Big|_{\omega=t} \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; Y(\omega) = 2\pi \cdot x(t)\Big|_{t=-\omega}$$

Beispiel $x(t) = \delta(t)$

Das Signal $x(t) = \delta(t)$ und das Spektrum $X(\omega) = 1$ sind eine Korrespondenz

Daraus ergibt sich die duale Korrespondenz

$$y(t) = X(\omega)\Big|_{\omega = t} = 1$$

$$\circ\!\!-\!\!\bullet$$

$$Y(\omega) = 2\pi \cdot x(t)\Big|_{t=-\omega} = 2\pi \cdot \delta(-\omega) = 2\pi \cdot \delta(\omega)$$

Beispiel Rechtecksignal $x(t) = \varepsilon(t+3) - \varepsilon(t-3)$

Es besitzt das Spektrum

$$X(\omega) = 6 \cdot \frac{\sin(3 \cdot \omega)}{3\omega}$$

Damit besitzt das Zeitsignal

$$y(t) = X(\omega)\Big|_{\omega = t} = 6 \cdot \frac{\sin(3t)}{3t}$$

das Spektrum

$$Y(\omega) = 2\pi \cdot x(t)\Big|_{t=-\omega} = 2\pi \cdot \Big(\varepsilon(-\omega+3) - \varepsilon(-\omega-3) \Big)$$

$$= 2\pi \Big(\varepsilon(\omega+3) - \varepsilon(\omega-3) \Big)$$

- Hausaufgabe: Spektrum der Sinusfunktion

$$x(t) = \sin(\omega_0 t) = \frac{1}{2j} \left(e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t} \right)$$

$$X(\omega) = ?$$