

Systemtheorie: Darstellung des Frequenzgangs

- Frequenzgang $G(\omega)$ ist eine komplexe Größe, in der der Amplitudengang und der Phasengang zusammengefasst sind

$$G(\omega) = |G(\omega)| \cdot e^{j\varphi(\omega)} = A(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)}$$

Amplitudengang $A(\omega)$ ist der Betrag des Frequenzgangs

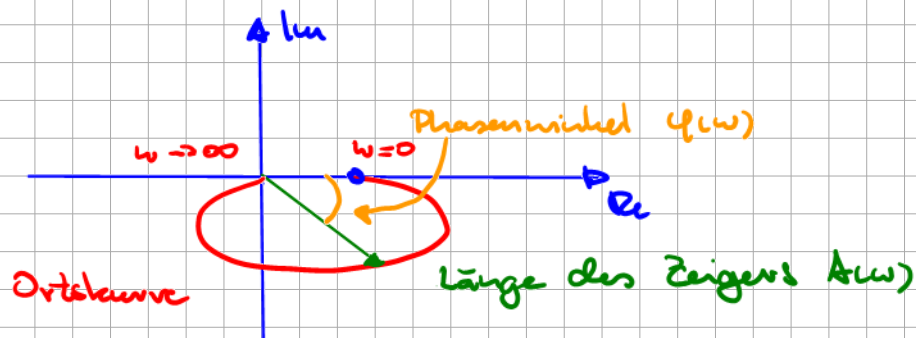
Phasengang $\varphi(\omega)$ ist die Phase des Frequenzgangs

- Frequenzgang kann auf zwei unterschiedlichen Arten dargestellt werden

1. Ortskurve
2. Bode-Diagramm

- Ortskurve

Bei der Ortskurve wird $G(\omega)$ in der komplexen Ebene dargestellt



Es wird ein komplexer Zeiger der Länge $A(\omega)$ gezeichnet, der mit der reellen Achse einen Winkel $\varphi(\omega)$ bildet, durch Variation von ω im Bereich $0 \leq \omega < \infty$ ergibt sich die rot eingezeichnete Ortskurve

In der Ortskurve kann nicht erkannt werden, welche Punkte zu welcher Frequenz gehören, Ortskurve wird bei Stabilitätsuntersuchungen in der Regelungstechnik verwendet (Nyquist-Kriterium)

Beispiel zur Ortskurve siehe Präsentation

- Frequenzkennlinien stellen Amplitudengang $A(\omega)$ und Phasengang $\varphi(\omega)$ in zwei separaten Diagrammen als Funktion der Frequenz dar, durch die separate Darstellung von Amplituden- und Phasengang bleibt die Frequenzinformation erhalten

Beispiel zur Frequenzkennlinie siehe Präsentation

- Bode-Diagramme sind eine besondere Form von Frequenzkennlinien
 - die Frequenzachse wird logarithmisch skaliert
 - der Phasengang wird mit linearer Skalierung dargestellt
 - die Darstellung des Amplitudengangs erfolgt in dB: dabei liegt die Idee zugrunde, das Verhältnis der Leistungen von Aus- und Eingang zu beschreiben

$$\log \left(\frac{P_y(\omega)}{P_x(\omega)} \right) = \log \left(\frac{|Y(\omega)|^2}{|U(\omega)|^2} \right) = 2 \cdot \log \left(\frac{|Y(\omega)|}{|U(\omega)|} \right)$$

Im praktischen Einsatz wird das zehnfache dieser Größe verwendet:

$$a(\omega) = 20 \cdot \log \left(\frac{|Y(\omega)|}{|U(\omega)|} \right) = 20 \cdot \log(A(\omega))$$

Wichtige Werte in dB:

$A(\omega)$	10	$\sqrt{2}$	1	$1/\sqrt{2}$	1/10
$a(\omega)/\text{dB}$	20	3	0	-3	-20

Ein Faktor von 10 entspricht eine Summe von 20dB

Beispiel Bode-Diagramm siehe Präsentation

Vorteil des Bode-Diagramms wird besonders gut deutlich, wenn sich der Frequenzgang $G(\omega)$ aus mehreren Teilen zusammensetzt:

$$\begin{aligned}G(\omega) &= G_1(\omega) \cdot G_2(\omega) \cdot \dots \cdot G_N(\omega) \\&= A_1(\omega) \cdot e^{j\varphi_1(\omega)} \cdot A_2(\omega) \cdot e^{j\varphi_2(\omega)} \cdot \dots \cdot A_N(\omega) \cdot e^{j\varphi_N(\omega)} \\&= A_1(\omega) \cdot A_2(\omega) \cdot \dots \cdot A_N(\omega) \cdot e^{j(\varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega) + \dots + \varphi_N(\omega))}\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich:

$$\alpha(\omega) = \alpha_1(\omega) + \alpha_2(\omega) + \dots + \alpha_N(\omega)$$

$$\varphi(\omega) = \varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega) + \dots + \varphi_N(\omega)$$

Betrag $\alpha(\omega)$ und Phase $\varphi(\omega)$ ergeben sich aus der Summe der Teilbeträge $\alpha_n(\omega)$ und der Teilphasen $\varphi_n(\omega)$, das erlaubt eine grafische Konstruktion der Bode-Diagramme, siehe AETZ-Mittelstromtechnik

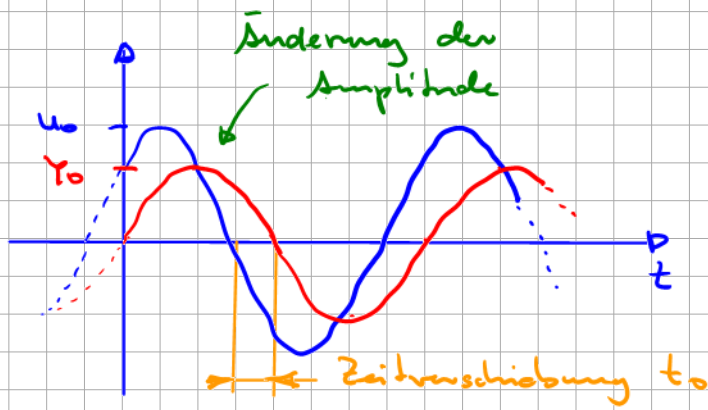
Für die Konstruktion sind Kenntnisse zu Übertragungsgliedern erforderlich, siehe App Übertragungsglieder ...

- Messung des Frequenzgangs

Zur Messung des Frequenzgangs an der Stelle ω_0 wird das LTI-System mit einem Signal

$$u(t) = U_0 \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi_u)$$

angeregt, Messung von Ein- und Ausgangssignal mit einem Oszilloskop



Eingangssignal $u(t)$

Ausgangssignal $y(t)$

$$y(t) = u_0 \cdot A(\omega_0) \cdot \cos(\omega_0(t - t_0) + \varphi_u)$$

$$= Y_0 \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi_u + \varphi(\omega_0))$$

Aus der Formung ergeben sich Amplitudengang und Phasengang

$$A(\omega_0) = \frac{Y_0(\omega_0)}{u_0(\omega_0)} \quad \text{Amplitudengang}$$

$$\varphi(\omega_0) = -\omega_0 \cdot t_0 \quad \text{Phasengang}$$

Variation der Frequenz ω_0 im relevanten Frequenzbereich führt zu dem gemachten Frequenzgang, typischerweise wird eine logarithmische Skalierung verwendet, Konstruktion und Beispiel siehe Skript...

- Hausaufgabe SS 2013: A2, WS 2016/17: A3, SS 2015: A3