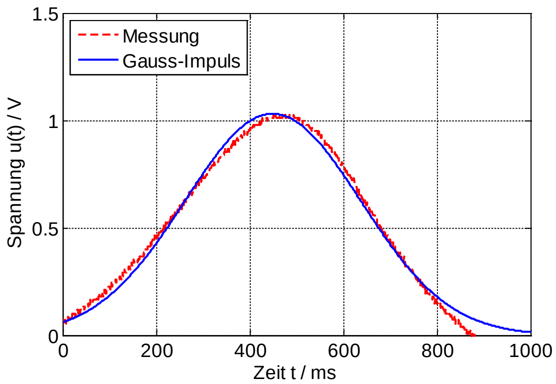
Systemtheorie Online

Musterlösung: Impulsförmige Anregung einer Klangschale, 04.11.2014

Die aufgenommenen Signale sind streng genommen keine Impulsfunktionen. Auch die Näherung mithilfe von Rechteckfunktionen ist sehr grob. Zur Beschreibung des Impulses ist die Gaußfunktion geeignet.

$$u(t) = U_0 \cdot e^{-\left(\frac{t-t_0}{T}\right)^2}$$

In diesem Beispiel wird mithilfe eines sogenannten Regressionsverfahrens die Gaußfunktion bestimmt, die den gemessenen Spannungsverlauf für den weichen Stoß nach einer Normierung der Amplitude am besten approximiert. Es ergeben sich die Werte t_0 = 449 ms und T = 256.75 ms.



Die Gaußfunktion stimmt insbesondere in der Mitte des Impulses mit den Messwerten gut überein. Erst für große Zeiten t > 800 ms zeigen sich größere Abweichungen. Insgesamt wird aber deutlich, dass die Approximation des Impulses mit einer Gaußfunktion zu geringeren Abweichungen führt als die Approximation mit einer Rechteckfunktion.

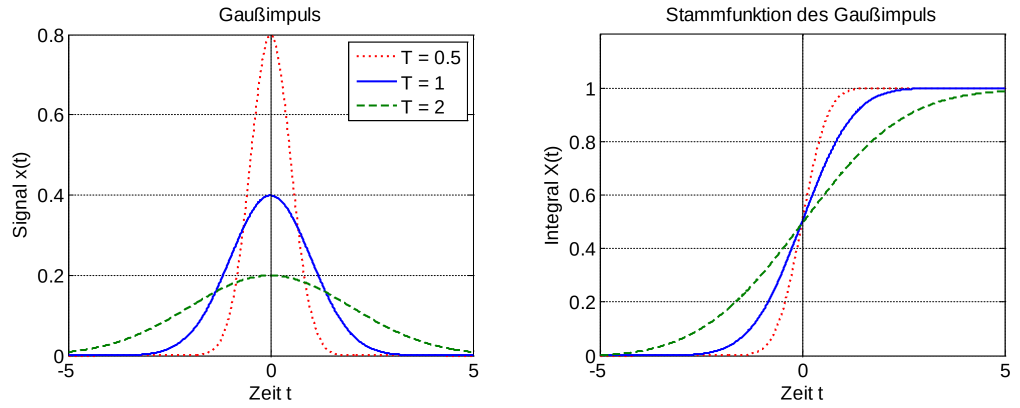
Die Beschreibung von Impulsen mit der Gaußfunktion hat außerdem den Vorteil, dass sie mathematisch ohne Sprungfunktionen beschrieben werden kann. Allgemein ist eine Gaußfunktion definiert als

$$x(t) = \frac{1}{T \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{t-t_0}{T}\right)^2}$$

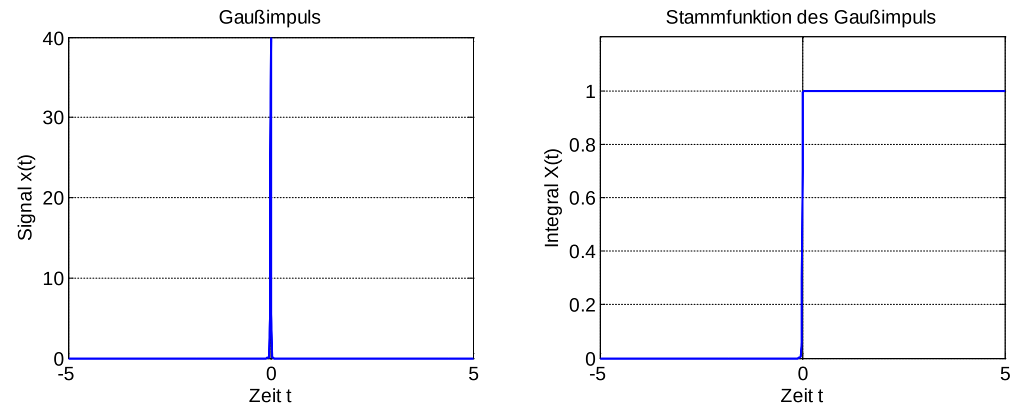
Der Parameter T beschreibt, wie breit die Gaußfunktion ist. Mit wachsendem T wird die Funktion breiter, wegen des Vorfaktors 1/T aber auch flacher. Die Stammfunktion X(t) mit

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\ d\tau = \frac{1}{T \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\tau-t_0}{T}\right)^2}\ d\tau$$

kann nicht analytisch bestimmt werden, es existieren aber numerische Funktionen und Tabellen zum Nachschlagen von Funktionswerten. Die Stammfunktion strebt für große Werte von t gegen eins, die Fläche unter der Gaußfunktion ist demnach immer eins, was auch für die Impulsfunktion $\delta(t)$ zutrifft. Darstellung der Gaußfunktion und ihrer Stammfunktion für $t_0 = 0$ und unterschiedliche Konstanten T.



Im Grenzübergang $T \rightarrow 0$ wird die Gaußfunktion immer schmaler und höher, sie wird der Impulsfunktion $\delta(t)$ immer ähnlicher. Zur Veranschaulichung wird die Gaußfunktion und ihre Stammfunktion für $t^0 = 0$ und eine Konstante T = 0.01 dargestellt. Die Impulsfunktion kann demnach als Grenzübergang unterschiedlicher Funktionen dargestellt werden.



Die Grafiken können mit einem MATLAB Programm erstellt werden.

```
% Initialisierung
close all;
clear all;
clc;

% Definition der Parameter
T1 = 0.5,
T2 = 1;
T3 = 2;

% Berechnung der Funktion
t = -5:0.01:5;
x1 = 1/sqrt(2*pi)/T1*exp(-0.5*(t/T1).^2);
x2 = 1/sqrt(2*pi)/T2*exp(-0.5*(t/T2).^2);
x3 = 1/sqrt(2*pi)/T3*exp(-0.5*(t/T3).^2);
X1 = cumsum(x1)*0.01;
X2 = cumsum(x2)*0.01;
X3 = cumsum(x3)*0.01;
```

```
% Grafische Darstellung
f = figure(1);
set(f,'Position',[100 100 1200 400]);

subplot(1,2,1);
plot(t,x1,'r:','linewidth',2);
hold on;
plot(t,x2,'b','linewidth',2);
plot(t,x3,'g--','linewidth',2);
hold off;
axis([-5 5 0 0.8]);
set(gca,'FontWeight','normal','FontName','Arial','FontSize',14);
xlabel('Zeit t','FontWeight','normal','FontName','Arial','FontSize',14);
ylabel('Signal
x(t)','FontWeight','normal','FontName','Arial','FontSize',14);
title('Gaußimpuls','FontWeight','normal','FontName','Arial','FontSize',14);
grid on;
box on;
h = legend('T = 0.5','T = 1','T = 2');
set(h,'location','northeast','FontWeight','normal','FontName','Arial','Font
Size',14);

subplot(1,2,2);
plot(t,X1,'r:','linewidth',2);
hold on;
plot(t,X2,'b','linewidth',2);
plot(t,X3,'g--','linewidth',2);
hold off;
axis([-5 5 0 1.2]);
set(gca,'FontWeight','normal','FontName','Arial','FontSize',14);
xlabel('Zeit t','FontWeight','normal','FontName','Arial','FontSize',14);
ylabel('Integral
X(t)','FontWeight','normal','FontName','Arial','FontSize',14);
title('Stammfunktion des
Gaußimpuls','FontWeight','normal','FontName','Arial','FontSize',14);
grid on;
box on;
```