Systemtheorie Online

Musterlösung: Kerbfilter, 08.01.2016

Das Filter kann als Spannungsteiler angesehen werden.

$$G(s) = \frac{U_A(s)}{U_E(s)} = \frac{R_S + s \cdot L + \frac{1}{s \cdot C}}{R + R_S + s \cdot L + \frac{1}{s \cdot C}} = \frac{s^2 \cdot L \cdot C + s \cdot R_S \cdot C + 1}{s^2 \cdot L \cdot C + s \cdot (R + R_S) \cdot C + 1} = 1 - \frac{s \cdot R \cdot C}{s^2 \cdot L \cdot C + s \cdot (R + R_S) \cdot C + 1}$$

Passive RLC-Systeme sind immer stabil. Damit lautet der Frequenzgang

$$G(\omega) = G(s)\big|_{s = j \cdot \omega} = 1 - \frac{j \cdot \omega \cdot R \cdot C}{1 - \omega^2 \cdot L \cdot C + j \cdot \omega \cdot (R + R_S) \cdot C} = 1 - G_2(\omega)$$

Statt dieses Frequenzgangs wird der zweite Summand analysiert und anschließend der Gesamtfrequenzgang interpretiert.

$$G_2(\omega) = \frac{j \cdot \omega \cdot R \cdot C}{1 + j \cdot \omega \cdot (R + R_S) \cdot C + (j \cdot \omega)^2 \cdot L \cdot C} = \frac{j \cdot \omega \cdot R \cdot C}{j \cdot \omega \cdot (R + R_S) \cdot C} \cdot \frac{1}{\frac{1}{j \cdot \omega \cdot (R + R_S) \cdot C} + 1 + \frac{(j \cdot \omega)^2 \cdot L \cdot C}{j \cdot \omega \cdot (R + R_S) \cdot C}}$$

$$= \frac{R}{R + R_S} \cdot \frac{1}{\frac{-j}{\omega \cdot (R + R_S) \cdot C} + 1 + \frac{j \cdot \omega \cdot L \cdot C}{(R + R_S) \cdot C}} = \frac{R}{R + R_S} \cdot \frac{1}{1 + j \cdot \frac{\sqrt{L \cdot C}}{(R + R_S) \cdot C} \cdot \left(\omega \cdot \sqrt{L \cdot C} - \frac{1}{\omega \cdot \sqrt{L \cdot C}} \right)}$$

Der Frequenzgang wird maximal, wenn die Differenz im Nenner zu null wird.

$$1 - \omega_0^2 \cdot L \cdot C = 0$$

Die entsprechende Frequenz wird als Resonanzfrequenz bezeichnet und berechnet sich zu

$$f_0 = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{1}{L \cdot C}}$$

Das Maximum der Übertragungsfunktion errechnet sich an dieser Stelle zu

$$G_{2MAX}(\omega_0) = \frac{R}{R + R_S}$$

Da der Wert reell ist, kann $G(\omega_0)$ direkt berechnet werden. Der Frequenzgang weist ein Minimum auf von

$$G_{MIN}\left(\omega_0\right) = 1 - \frac{R}{R+R_S} = \frac{R_S}{R+R_S}$$

Die 3-dB-Grenzfrequenz von $G_2(\omega)$ errechnet sich aus der Bedingung, dass Real- und Imaginärteil betragsmäßig gleich groß sind.

$$1 - \omega_G^2 \cdot L \cdot C = \pm \omega_G \cdot \left(R + R_S\right) \cdot C$$

Umstellen

$$\omega_G^2 \cdot L \cdot C \mp \omega_G \cdot \left(R + R_S\right) \cdot C - 1 = 0$$

führt zu der quadratischen Gleichung

$$\omega_G^2 \mp \omega_G \cdot \frac{R+R_S}{L} - \frac{1}{L \cdot C} = 0$$

mit den Lösungen

$$\omega_G = \mp \frac{R+R_S}{2 \cdot L} \pm \sqrt{\left(\frac{R+R_S}{2 \cdot L}\right)^2 + \frac{1}{L \cdot C}}$$

Die beiden positiven Lösungen lauten

$$\omega_{GU} = -\frac{R+R_S}{2 \cdot L} + \sqrt{\left(\frac{R+R_S}{2 \cdot L}\right)^2 + \frac{1}{L \cdot C}}$$

und

$$\omega_{GO} = \frac{R+R_S}{2 \cdot L} + \sqrt{\left(\frac{R+R_S}{2 \cdot L}\right)^2 + \frac{1}{L \cdot C}}$$

Die Bandbreite von $G_2(\omega)$ berechnet sich damit zu

$$B = \omega_{GO} - \omega_{GU} = \frac{R+R_S}{2 \cdot L} + \sqrt{\left(\frac{R+R_S}{2 \cdot L}\right)^2 + \frac{1}{L \cdot C}} - \left(-\frac{R+R_S}{2 \cdot L} + \sqrt{\left(\frac{R+R_S}{2 \cdot L}\right)^2 + \frac{1}{L \cdot C}}\right) = \frac{R+R_S}{L}$$

Für eine geringe Bandbreite von $G_2(\omega)$ müssen deshalb die Widerstandswerte R und R_S klein und die Induktivität L groß gewählt werden.

Ein gutes Kerbfilter mit einem ausgeprägtem Minimum a_{MIN} und einer geringen Bandbreite B wird demnach erreicht, wenn der Spulenwiderstand R_S klein und die Induktivität L groß sind. Bei der Dimensionierung der Widerstands R muss ein Kompromiss zwischen Bandbreite und Dämpfung an der Resonanzfrequenz gemacht werden. Die Dimensionierung der Kapazität C ist von der Resonanzfrequenz abhängig.