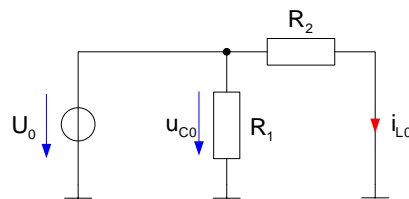


Systemtheorie Online

Musterlösung: RLC-Schwingkreis, 11.11.2014

Wenn alle Einschaltvorgänge abgeschlossen sind, können die Induktivitäten durch einen Kurzschluss ersetzt und Kapazitäten aus der Schaltung entfernt werden. Es gilt folgendes Ersatzschaltbild:

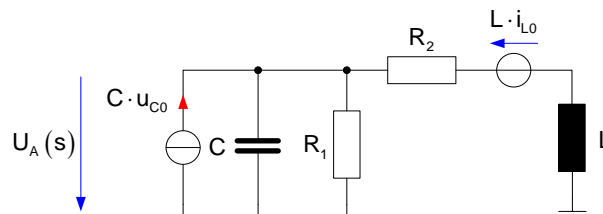


Aus dem Ersatzschaltbild ergeben sich die Anfangsbedingung

$$u_{C0} = U_0$$

$$i_{L0} = \frac{U_0}{R_2}$$

Mit den Angaben aus dem Skript kann folgendes Ersatzschaltbild erstellt werden.



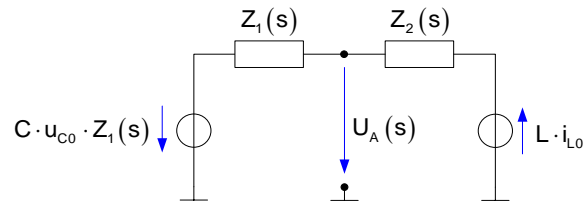
Dabei wird die Anfangsbedingung der Kapazität über eine Stromquelle modelliert, die Anfangsbedingung der Induktivität über eine Spannungsquelle. Stromquelle, Kapazität und Widerstand R_1 können zu einer Spannungsquelle mit Innenwiderstand gewandelt werden. Dazu wird die Parallelschaltung aus Widerstand R_1 und Kapazität C zu der Impedanz $Z_1(s)$ zusammengefasst.

$$Z_1(s) = \frac{R_1 \cdot \frac{1}{C \cdot s}}{R_1 + \frac{1}{C \cdot s}} = \frac{R_1}{R_1 \cdot C \cdot s + 1}$$

Auch der Widerstand R_2 und die Induktivität L werden zusammengefasst.

$$Z_2(s) = R_2 + s \cdot L$$

Es ergibt sich folgendes Ersatzschaltbild.



Mit dem Superpositionsprinzip kann die Spannung $U_A(s)$ berechnet werden zu

$$\begin{aligned}
 U_A(s) &= \frac{Z_2(s)}{Z_1(s) + Z_2(s)} \cdot Z_1(s) \cdot u_{c0} \cdot C - \frac{Z_1(s)}{Z_1(s) + Z_2(s)} \cdot L \cdot i_{L0} \\
 &= \frac{R_2 + s \cdot L}{R_1 \cdot C \cdot s + 1 + R_2 + s \cdot L} \cdot \frac{R_1}{R_1 \cdot C \cdot s + 1} \cdot u_{c0} \cdot C - \frac{\frac{R_1}{R_1 \cdot C \cdot s + 1}}{\frac{R_1}{R_1 \cdot C \cdot s + 1} + R_2 + s \cdot L} \cdot L \cdot i_{L0} \\
 &= \frac{s \cdot L \cdot R_1 \cdot C \cdot u_{c0} + R_2 \cdot R_1 \cdot C \cdot u_{c0} - R_1 \cdot L \cdot i_{L0}}{s^2 \cdot L \cdot R_1 \cdot C + s \cdot (L + R_2 \cdot R_1 \cdot C) + R_1 + R_2}
 \end{aligned}$$

Um die Ausgangsspannung zu berechnen, muss die Laplace-Transformierte auf eine standardisierte Form gebracht werden. Wegen der schwingenden Ausgangsspannung liegen konjugiert komplexe Pole vor.

$$\begin{aligned}
 U_A(s) &= \frac{s \cdot L \cdot R_1 \cdot C \cdot u_{c0} + R_2 \cdot R_1 \cdot C \cdot u_{c0} - R_1 \cdot L \cdot i_{L0}}{s^2 \cdot L \cdot R_1 \cdot C + s \cdot (L + R_2 \cdot R_1 \cdot C) + R_1 + R_2} = \frac{L \cdot R_1 \cdot C}{L \cdot R_1 \cdot C} \cdot \frac{u_{c0} \cdot s + \frac{R_2 \cdot R_1 \cdot C \cdot u_{c0} - R_1 \cdot L \cdot i_{L0}}{L \cdot R_1 \cdot C}}{s^2 + s \cdot \frac{L + R_2 \cdot R_1 \cdot C}{L \cdot R_1 \cdot C} + \frac{R_1 + R_2}{L \cdot R_1 \cdot C}} \\
 &= \frac{u_{c0} \cdot \left(s + \frac{L + R_2 \cdot R_1 \cdot C}{2 \cdot L \cdot R_1 \cdot C} \right) - \frac{L + R_2 \cdot R_1 \cdot C \cdot u_{c0}}{2 \cdot L \cdot R_1 \cdot C} + \frac{2 \cdot R_2 \cdot R_1 \cdot C \cdot u_{c0} - 2 \cdot R_1 \cdot L \cdot i_{L0}}{2 \cdot L \cdot R_1 \cdot C}}{\left(s + \frac{L + R_2 \cdot R_1 \cdot C}{2 \cdot L \cdot R_1 \cdot C} \right)^2 + \frac{R_1 + R_2}{L \cdot R_1 \cdot C} - \left(\frac{L + R_2 \cdot R_1 \cdot C}{2 \cdot L \cdot R_1 \cdot C} \right)^2} \\
 &= \frac{u_{c0} \cdot \left(s + \frac{L + R_2 \cdot R_1 \cdot C}{2 \cdot L \cdot R_1 \cdot C} \right) - \frac{L - R_2 \cdot R_1 \cdot C \cdot u_{c0}}{2 \cdot L \cdot R_1 \cdot C} - \frac{i_{L0}}{C}}{\left(s + \frac{L + R_2 \cdot R_1 \cdot C}{2 \cdot L \cdot R_1 \cdot C} \right)^2 + \frac{R_1 + R_2}{L \cdot R_1 \cdot C} - \left(\frac{L + R_2 \cdot R_1 \cdot C}{2 \cdot L \cdot R_1 \cdot C} \right)^2} = \frac{s + \delta_0}{(s + \delta_0)^2 + \omega_0^2} \cdot u_{c0} - \frac{\frac{u_{c0}}{2 \cdot R_1 \cdot C} - \frac{R_2 \cdot u_{c0}}{2 \cdot L} + \frac{i_{L0}}{C}}{(s + \delta_0)^2 + \omega_0^2}
 \end{aligned}$$

Das Signal schwingt mit der Kreisfrequenz

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{R_1 + R_2}{L \cdot R_1 \cdot C} - \left(\frac{L + R_2 \cdot R_1 \cdot C}{2 \cdot L \cdot R_1 \cdot C} \right)^2}$$

und weist eine Dämpfung von

$$\delta_0 = \frac{L + R_2 \cdot R_1 \cdot C}{2 \cdot L \cdot R_1 \cdot C}$$

auf. Das Ergebnis kann mit MATLAB dargestellt werden.

```

% Initialisierung
clear all;
close all;
clc;

% Definition der Parameter
L = 1.27e-3;
C = 64.4e-9;
R1 = 68.e3;
R2 = 34.86;
uc0 = 0.5;
il0 = 0.5/12.82;

% Berechnung von Frequenz und Dämpfung
w0 = sqrt((R1+R2)/L/R1/C-((L+R2*R1*C)/2/L/R1/C)^2);
d0 = (L+R2*R1*C)/2/L/R1/C;

% Berechnung des Einschwingvorgangs
t= 0:1e-6:0.5e-3;
uA = uc0*exp(-d0*t).*cos(w0*t) -(uc0/2/R1/C - R2*uc0/2/L + il0/C)/w0*exp(-
d0*t).*sin(w0*t);

% Darstellung
f = figure(2);
set(f, 'Position', [100 100 1200 400]);

% Darstellung der Signale
subplot(1,2,1);
plot(t*1000,uA, 'b', 'Linewidth', 2);
hold on;
plot([0 1000],[0 0], 'k', 'Linewidth', 1);
hold off;
axis([0 0.5 -5 5]);
set(gca, 'XTick', 0:0.1:0.5, 'YTick', -4:2:4);
set(gca, 'FontWeight', 'normal', 'FontName', 'Arial', 'FontSize', 14);
title('Übersicht über
Einschwingvorgang', 'FontWeight', 'normal', 'FontName', 'Arial', 'FontSize', 14);
xlabel('Zeit t /
ms', 'FontWeight', 'normal', 'FontName', 'Arial', 'FontSize', 14);
ylabel('Ausgangsspannung u_{
A}(t)', 'FontWeight', 'normal', 'FontName', 'Arial', 'FontSize', 14);
grid on;
box on;

% Darstellung der Signale nahe Anfangsbedingung
subplot(1,2,2);
plot(t*1000,uA, 'b', 'Linewidth', 2);
hold on;
plot([0 1000],[0 0], 'k', 'Linewidth', 1);
hold off;
axis([0 0.05 -5 5]);
set(gca, 'XTick', 0:0.01:0.05, 'YTick', -4:2:4);
set(gca, 'FontWeight', 'normal', 'FontName', 'Arial', 'FontSize', 14);
title('Analyse der
Anfangsbedingung', 'FontWeight', 'normal', 'FontName', 'Arial', 'FontSize', 14);
xlabel('Zeit t /
ms', 'FontWeight', 'normal', 'FontName', 'Arial', 'FontSize', 14);
ylabel('Ausgangsspannung u_{
A}(t)', 'FontWeight', 'normal', 'FontName', 'Arial', 'FontSize', 14);
grid on;
box on;

```

Es ergeben sich folgende Signalverläufe:

