

Systemtheorie Teil B

- Zeitdiskrete Signale und Systeme -
Musterlösungen

Manfred Strohrmann
Urban Brunner



Hochschule Karlsruhe
Technik und Wirtschaft
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Näher dran.

2 Musterlösungen - Signalabtastung und Rekonstruktion..... 4

2.1	Abtastzeit und Zahlenfolgen	4
2.2	Abtasttheorem und Aliasing.....	4
2.3	Abtasten von Signalen.....	6
2.4	Spektren abgetasteter Signale	7
2.5	Rekonstruktionsfilter mit endlicher Steilheit.....	8
2.6	Fourier-Transformierte der idealen Abtastfunktion.....	8
2.7	Reale Rekonstruktion	9
2.8	Oversampling.....	10
2.9	Abtasten bei Störungen	10
2.10	Reale Abtastung	12
2.11	Abtastung und Rekonstruktion	12
2.12	Interpolation im Zeitbereich	14

2 Musterlösungen - Signalabtastung und Rekonstruktion

2.1 Abtastzeit und Zahlenfolgen

a) Aus der Aufgabenstellung ergeben sich die Bedingungen

$$20 \cdot \pi \cdot k \cdot T_A = \frac{\pi}{5} \cdot k$$

und

$$40 \cdot \pi \cdot k \cdot T_A = \frac{2 \cdot \pi}{5} \cdot k$$

Beide Gleichungen sind linear voneinander abhängig, sodass nur eine Gleichung betrachtet werden muss.

$$20 \cdot \pi \cdot k \cdot T_A = \frac{\pi}{5} \cdot k$$

Auflösen nach T_A führt zu

$$T_A = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{20} = \frac{1}{100}$$

b) Das Signal $x(t)$ ist periodisch in $T_0 = 1/10$, damit ist $f_0 = 10$. Deshalb können die Abtastwerte $x[k]$ zum Beispiel auch durch das Signal

$$\begin{aligned} x(t) &= \sin(2 \cdot \pi \cdot (10 + 100) \cdot t) + \cos(2 \cdot \pi \cdot (20 + 100) \cdot t) \\ &= \sin(2 \cdot \pi \cdot 110 \cdot t) + \cos(2 \cdot \pi \cdot 120 \cdot t) \end{aligned}$$

erzeugt werden.

2.2 Abtasttheorem und Aliasing

a) Die Abtastfrequenz für Signal $x_1(t)$ ergibt sich aus

$$f_{A1} = \frac{1}{T_{A1}} = 400 \text{ Hz}$$

Die maximale Frequenz des Signals $x_1(t)$ beträgt $f_{G1} = 100$ Hz. Damit ist die Abtastfrequenz eingehalten, denn es gilt:

$$f_{A1} = 4 \cdot f_G \geq 2 \cdot f_G$$

Die Abtastfrequenz für Signal $x_2(t)$ ergibt sich aus

$$f_{A2} = \frac{1}{T_{A2}} = 1500 \text{ Hz}$$

Die maximale Frequenz des Signals $x_2(t)$ beträgt $f_{G2} = 2000$ Hz. Damit ist die Abtastfrequenz nicht eingehalten, und es ist mit Aliasing zu rechnen.

b) Die Zeitpunkte, an denen das Signal abgetastet wird, sind $t_k = k T_A$. Daraus ergibt sich die Darstellung

$$\begin{aligned} x_{A1}(t) &= x_1(t) \cdot a(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k \cdot T_{A1}) \cdot \delta(t - k \cdot T_{A1}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sin\left(2 \cdot \pi \cdot k \cdot \frac{100}{400}\right) \cdot \delta\left(t - k \cdot \frac{1}{400}\right) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot k\right) \cdot \delta\left(t - k \cdot \frac{1}{400}\right) \end{aligned}$$

Vereinfacht können die Abtastwerte als Zahlenfolge $x[k]$ angegeben werden.

$$x_{A1}[k] = \sin\left(\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot k\right)$$

Für Signal 2 ergibt sich entsprechend

$$x_{A2}(t) = x_2(t) \cdot a(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_2(k \cdot T_{A1}) \cdot \delta(t - k \cdot T_{A1}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \cos\left(\pi \cdot k \cdot \frac{4000}{1500}\right) \cdot \delta\left(t - k \cdot \frac{1}{1500}\right)$$

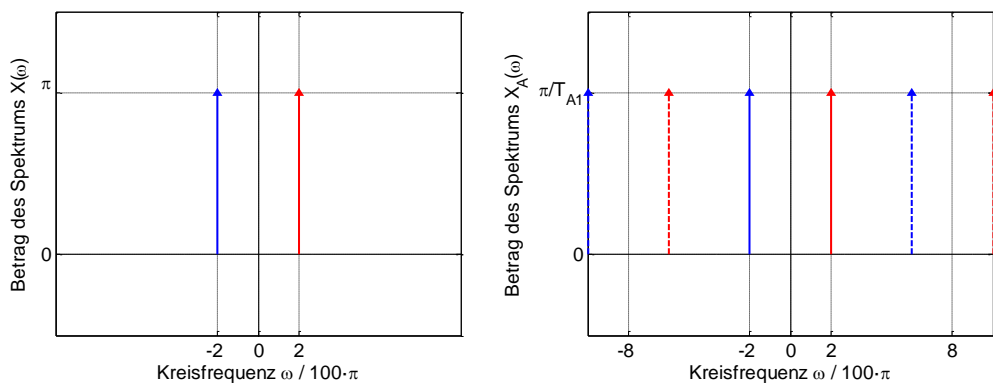
$$x_{A2}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \cos\left(\frac{40}{15} \cdot \pi \cdot k\right) \cdot \delta\left(t - k \cdot \frac{1}{1500}\right)$$

Vereinfacht können die Abtastwerte als Zahlenfolge $x[k]$ angegeben werden.

$$x_{A2}[k] = \cos\left(\frac{40}{15} \cdot \pi \cdot k\right)$$

c) Zur Herleitung des Spektrums $X_{A1}(\omega)$ wird zunächst das Spektrum des kontinuierlichen Signals $X_1(\omega)$ skizziert. Durch die Abtastung wird das Spektrum des kontinuierlichen Signals $X_1(\omega)$ in ω_A periodisch wiederholt und mit dem Wert $1/T_A$ multipliziert.

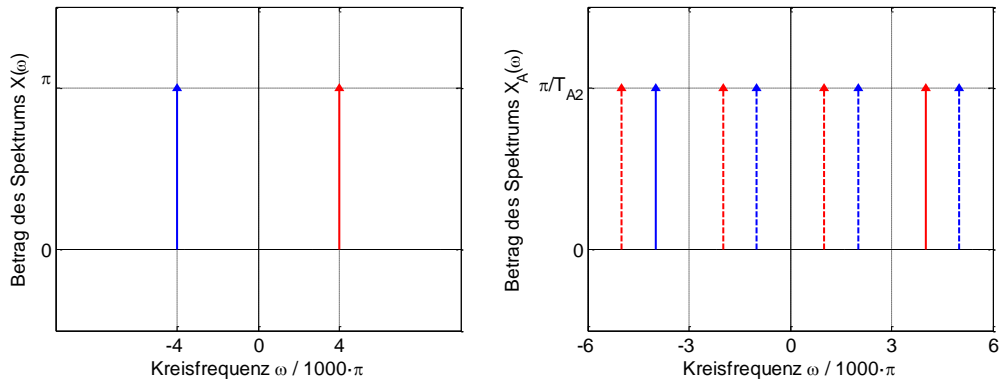
$$\omega_{A1} = \frac{2 \cdot \pi}{T_{A1}} = 2 \cdot \pi \cdot 400 = 800 \cdot \pi$$



Im Basisband ändert sich das Spektrum nicht, es findet kein Aliasing statt.

Auch zur Herleitung des Spektrums $X_{A2}(\omega)$ wird auch zuerst das Spektrum des kontinuierlichen Signals $X_2(\omega)$ skizziert. Durch die Abtastung wird auch hier das Spektrum des kontinuierlichen Signals $X_2(\omega)$ in ω_A periodisch wiederholt und mit dem Wert $1/T_A$ multipliziert. Die Darstellung zeigt, dass Aliasing auftritt.

$$\omega_{A2} = \frac{2 \cdot \pi}{T_{A2}} = 2 \cdot \pi \cdot 1500 = 3000 \cdot \pi$$

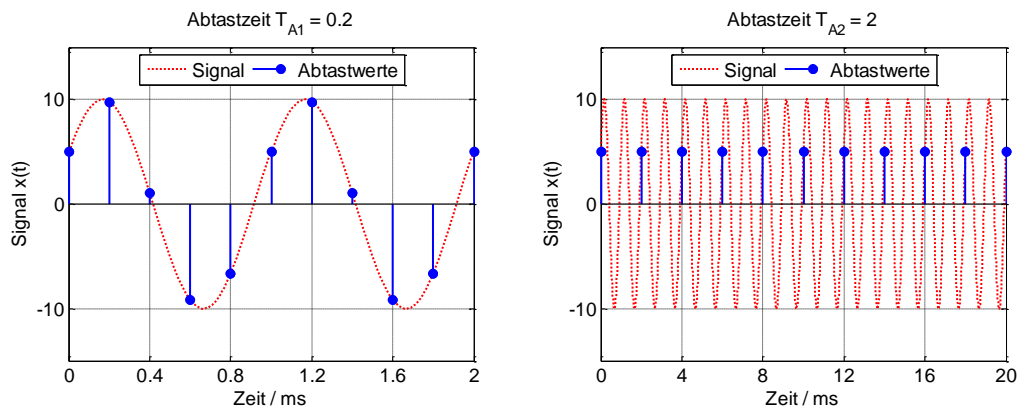


2.3 Abtasten von Signalen

a) Die Abbildung zeigt den Verlauf des analogen Signals sowie die einzelnen Abtastwerte. Das analoge Signal wird mit einer Frequenz von $f_{A1} = 5$ kHz abgetastet. Daraus ergibt sich eine Abtastzeit von

$$T_{A1} = \frac{1}{f_{A1}} = \frac{1}{5000} = 0.2$$

Damit ergeben sich die im linken Bild dargestellten Signalverläufe:



Die maximale Frequenz des Signals beträgt nach der Aufgabenstellung $f_G = 1$ kHz. Das Abtasttheorem ist eingehalten, wenn gilt:

$$f_{A1} \geq 2 \cdot f_G = 2 \text{ kHz}$$

Da die Abtastfrequenz $f_{A1} = 5$ kHz beträgt und damit größer ist als $2 \cdot f_G$, ist das Abtasttheorem eingehalten.

b) Für eine Abtastfrequenz von $f_{A2} = 0.5$ kHz beträgt die Abtastzeit:

$$T_{A2} = \frac{1}{f_{A2}} = \frac{1}{500} = 2$$

Damit ergeben sich die im rechten Bild oben gezeigten Abtastwerte. Die maximale Frequenz des Signals beträgt definitionsgemäß $f_0 = 1$ kHz. Das Abtasttheorem ist eingehalten, wenn gilt:

$$f_{A2} \geq 2 \cdot f_0 = 2 \text{ kHz}$$

Da die Abtastfrequenz $f_A = 0.5$ kHz beträgt und damit kleiner als die Frequenz $2 \cdot f_G$ ist, ist das Abtasttheorem nicht eingehalten.

2.4 Spektren abgetasteter Signale

a) Das Spektrum des abgetasteten Signals ergibt sich durch periodische Fortsetzung des Spektrums $X(\omega)$ in ω_A . Zum Skizzieren der Spektren muss in ω_A bestimmt werden.

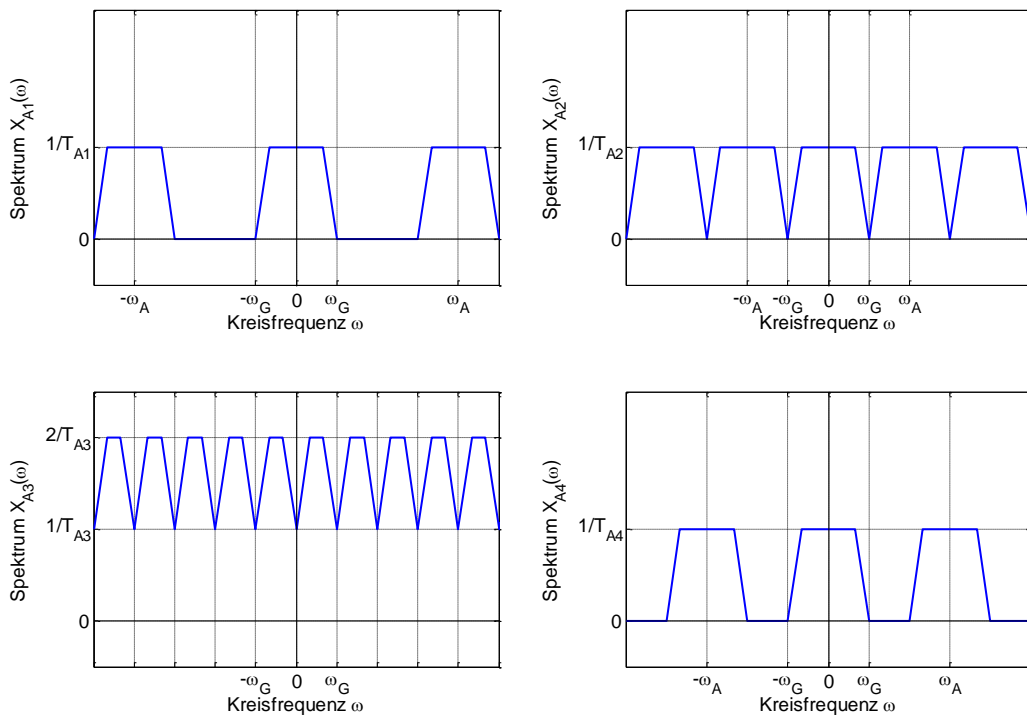
$$\omega_{A1} = \frac{2 \cdot \pi}{\pi} \cdot 2 \cdot \omega_g = 4 \cdot \omega_g$$

$$\omega_{A2} = \frac{2 \cdot \pi}{\pi} \cdot \omega_g = 2 \cdot \omega_g$$

$$\omega_{A3} = \frac{2 \cdot \pi}{2 \cdot \pi} \cdot \omega_g = \omega_g$$

$$\omega_{A4} = \frac{2 \cdot \pi}{\pi} \cdot 3 \cdot \omega_g = 3 \cdot \omega_g$$

Es ergeben sich folgende Spektren.

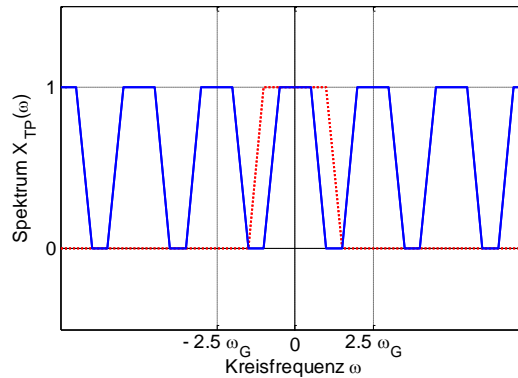


b) Im Fall $T_A = T_{A3}$ tritt Aliasing auf, da das Abtasttheorem nicht eingehalten wird. In allen anderen Fällen ist das Abtasttheorem eingehalten, und es tritt kein Aliasing auf.

c) Im Fall $T_A = T_{A2}$ wird kritisch abgetastet, das Abtasttheorem ist gerade eben noch eingehalten.

2.5 Rekonstruktionsfilter mit endlicher Steilheit

Der Grenzfall zur Rekonstruktion ergibt sich aus der Bedingung, dass nach der Rekonstruktion kein Spektralanteil des periodisch fortgesetzten Spektrums mehr vorhanden sein darf. Das Signal muss dazu um $\omega_A = 2.5 \cdot \omega_G$ verschoben werden.



Damit ergibt sich eine Abtastfrequenz von

$$f_A = \frac{\omega_A}{2 \cdot \pi} = \frac{2.5 \cdot \omega_G}{2 \cdot \pi}$$

2.6 Fourier-Transformierte der idealen Abtastfunktion

Die Abtastfunktion $a(t)$ ist ein periodisches Signal mit der Periodendauer T_A .

$$a(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - T_A \cdot k)$$

Das Signal kann damit als Fourier-Reihe dargestellt werden. Die Fourier-Koeffizienten ergeben sich zu

$$A_n = \frac{1}{T_A} \cdot \int_{-T_A/2}^{T_A/2} \delta(t) \cdot e^{-jn \cdot \omega_0 \cdot t} dt = \frac{1}{T_A} \cdot \int_{-T_A/2}^{T_A/2} \delta(t) \cdot e^{-jn \cdot \omega_A \cdot t} dt$$

Wegen der Ausblendeigenschaft der Impulsfunktion gilt:

$$A_n = \frac{1}{T_A} \cdot \int_{-T_A/2}^{T_A/2} \delta(t) \cdot e^{-jn \cdot \omega_A \cdot t} dt = \frac{1}{T_A} \cdot e^{-jn \cdot \omega_A \cdot 0} \cdot \int_{-T_A/2}^{T_A/2} \delta(t) dt = \frac{1}{T_A}$$

Das Spektrum ist damit an allen Stellen null $A(\omega) = 0$, nur an den Stellen $n \cdot \omega_A$ weist es den Wert $1/T_A$ auf. Der Zusammenhang zwischen den Fourier-Koeffizienten A_n und der Fourier-Transformierten $A(n \cdot \omega_A)$ ergibt sich aus

$$A(n \cdot \omega_A) = 2 \cdot \pi \cdot A_n$$

Damit kann das Spektrum der idealen Abtastfunktion dargestellt werden als

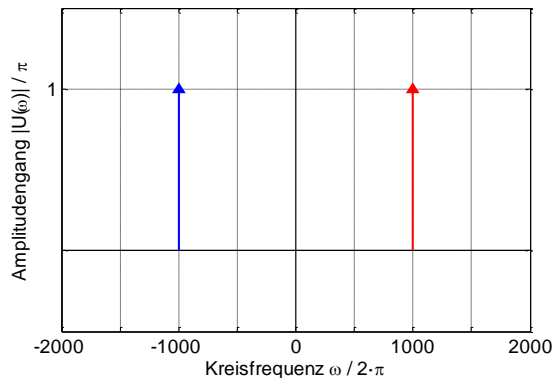
$$A(\omega) = \frac{2 \cdot \pi}{T_A} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n \cdot \omega_0) = \frac{2 \cdot \pi}{T_A} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - n \cdot \frac{2 \cdot \pi}{T_A}\right) = \frac{2 \cdot \pi}{T_A} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n \cdot \omega_A)$$

2.7 Reale Rekonstruktion

a) Mithilfe der Korrespondenz der Fourier-Transformation ergibt sich

$$\mathfrak{T}\{u(t)\} = \mathfrak{T}\{\cos(2 \cdot \pi \cdot 1000 \cdot t)\} = \pi \cdot (\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0))$$

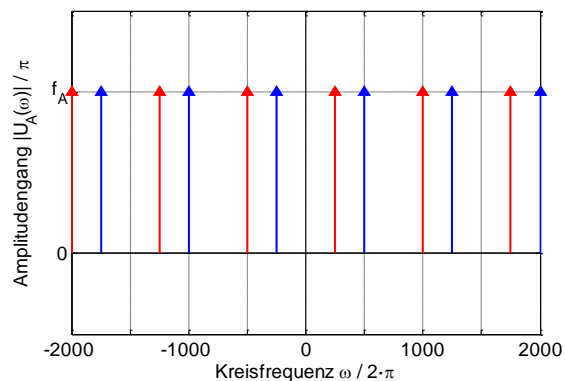
Das Spektrum besteht aus zwei Impulsen an den Stellen $\omega_0 = \pm 2000 \pi$, die beide das Gewicht π besitzen.



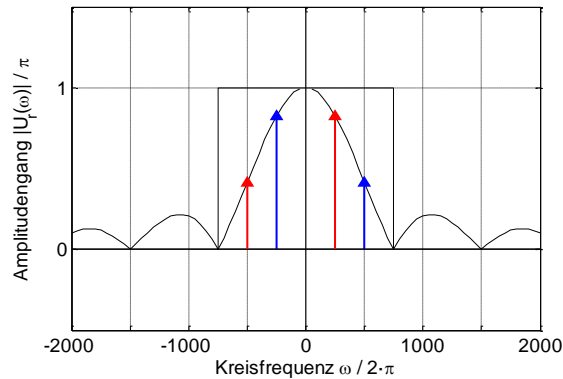
b) Das Spektrum hat eine maximale Frequenz von $f_{\max} = 1000$ Hz. Die Abtastfrequenz beträgt $f_A = 750$ Hz. Daraus ergibt sich, dass das Abtasttheorem nicht eingehalten ist.

c) Das Spektrum des abgetasteten Signals ergibt sich aus dem in ω_A periodisch fortgesetzten Spektrum des zeitkontinuierlichen Signals, das mit dem Faktor $f_A = 1/T_A$ gewichtet wird.

$$U_A(\omega) = \frac{1}{T_A} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} U(\omega - n \cdot \omega_A)$$



d) Durch die Rekonstruktion mit dem Halteglied und einem idealen Tiefpass mit einer Grenzfrequenz von $f_G = 750$ Hz wird der Spektralanteil, der sich unterhalb $-f_G = -750$ Hz befindet, und der Spektralbereich, der sich oberhalb von $f_G = 750$ Hz befindet, eliminiert. In den Grenzen $-f_G < f < f_G$ wird das Spektrum mit dem Frequenzgang des Haltegliedes multipliziert. Es ergibt sich das folgende Spektrum:

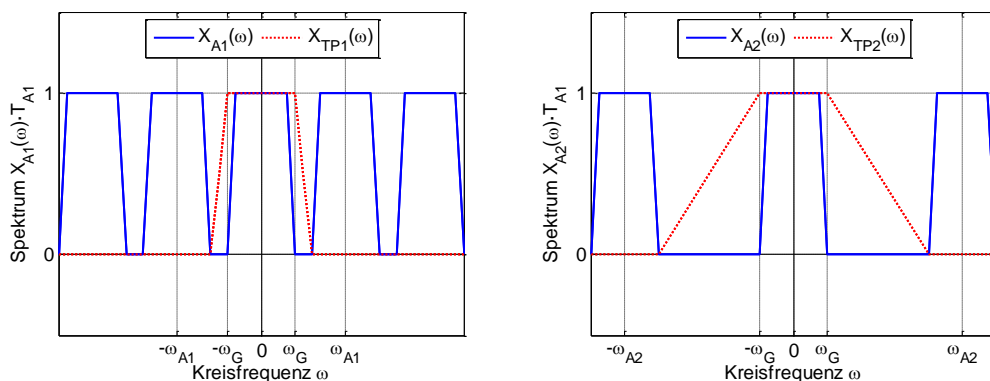


2.8 Oversampling

a) Das Spektrum des Signals wird periodisch in f_A fortgesetzt. Die niedrigste Frequenz des fortgesetzten Spektrums hat den Wert

$$f_1 = f_{A1} - f_G$$

Der Filter hat damit für den Übergang von Durchlass- bis Sperrbereich einen Frequenzbereich von f_G bis $f_{A1} - f_G$.



b) Durch die höhere Abtastfrequenz ziehen sich die einzelnen Spektren weiter auseinander. Der Frequenzbereich für den Übergang erhöht sich damit zu

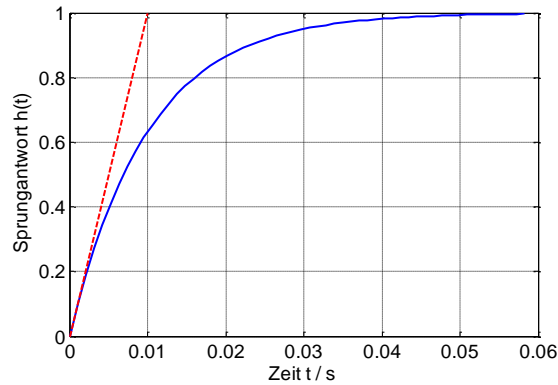
$$f_2 = f_{A2} - f_G$$

Durch das Oversampling wird damit die Forderung an die Steilheit des Rekonstruktionsfilters abgeschwächt.

2.9 Abtasten bei Störungen

a) Durch Einzeichnen der Geraden mit der Anfangssteigung oder die Bestimmung der Zeit, bei der der Sprung 63 % seines Endwertes erreicht, kann die Zeitkonstante des Systems zu $T = 0.01$ abgelesen werden. Die 3-dB-Grenzfrequenz des Systems berechnet sich damit zu

$$\omega_G = \frac{1}{T} = \frac{1}{0.01} = 100$$



b) Da die Abtastfrequenz $\omega_A = 4 \cdot \omega_G$ sein soll, ergibt sich

$$\omega_A = 4 \cdot \omega_G = 400$$

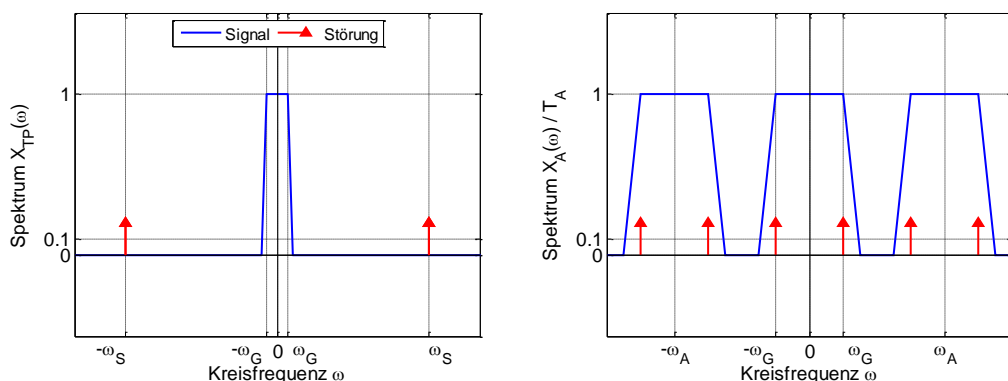
c) Das Abtasttheorem ist eingehalten, wenn die Abtastfrequenz mindestens doppelt so groß ist wie die maximale Frequenz, die in dem Signal, das abgetastet werden soll, vorkommt. Da hier die Abtastfrequenz auf das Vierfache der maximalen Frequenz festgelegt ist, ist das Abtasttheorem zunächst einmal eingehalten.

d) Ein solcher Tiefpass wird als Anti-Aliasing-Tiefpass bezeichnet.

e) Die Störung wird zwar durch den Tiefpass gedämpft, allerdings nicht vollständig eliminiert. Ein RC-Tiefpass erster Ordnung fällt ab der Grenzfrequenz mit 20 dB/Dekade ab. Da die Frequenz der Störung exakt auf dem Zehnfachen der Grenzfrequenz des Filters liegt, wird diese somit um -20 dB gedämpft. Eine Dämpfung von -20 dB entspricht einem Faktor von 0.1. Damit liegt die Amplitude der Störung bei 0.2 V.

Durch das Abtasten des Signals wiederholt sich das Spektrum periodisch mit der Abtastfrequenz. Frequenzanteile, die größer als die halbe Abtastfrequenz sind, verursachen Aliasing. Die Frequenz der Störung liegt oberhalb der Abtastfrequenz. Durch Aliasing erscheint diese Störung allerdings auch im Basisband.

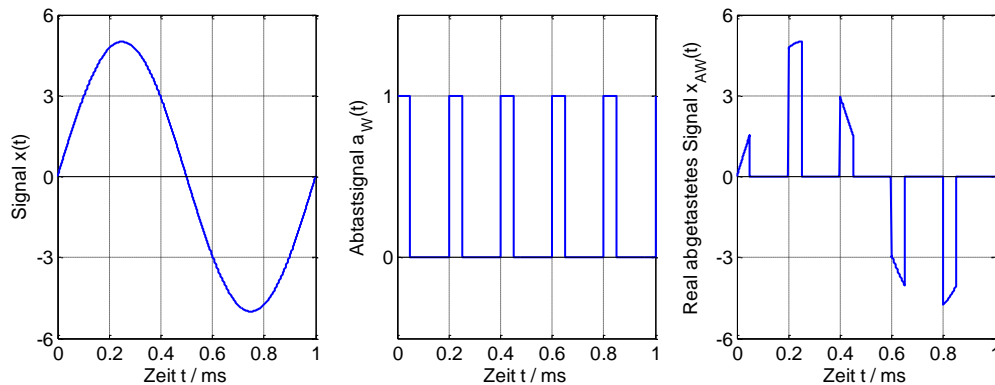
Die Spektren von zeitkontinuierlichem und abgetastetem Signal sind in den beiden folgenden Diagrammen dargestellt.



Wie die Abbildung zeigt, erscheinen die Frequenzanteile bei $\pm \omega_S$ im Basisband bei der Frequenz $\pm \omega_G$. Die Frequenzanteile bei den übrigen Frequenzen ergeben sich aus der periodischen Wiederholung der Spektren wegen des Abtastvorgangs.

2.10 Reale Abtastung

Folgende Abbildung zeigt den Verlauf vom analogen Signal a) und das reale Abtastsignal b) sowie das daraus resultierende abgetastete Signal c).



d) Durch das reelle Abtasten wird das Spektrum des Signals mit dem Spektrum des Rechtecks, das zwangsläufig beim reellen Abtasten entsteht, multipliziert. Die Fourier-Transformierte eines Rechtecks lautet

$$W(\omega) = 2 \cdot \frac{\sin\left(\frac{\omega \cdot T_W}{2}\right)}{\omega \cdot T_W}$$

Die Wandlungszeit ist $T_W = 50 \mu\text{s}$, damit beträgt bei der Frequenz

$$\omega_0 = 2 \cdot \pi \cdot 1 \text{ kHz}$$

die Dämpfung der Sinusschwingung

$$W(\omega_0) = \frac{\sin(\pi \cdot 50 \cdot 10^{-6} \text{ s} \cdot 1000 \text{ Hz})}{\pi \cdot 50 \cdot 10^{-6} \text{ s} \cdot 1000 \text{ Hz}} = 0.9959$$

Die Amplitude des Signals sinkt damit auf $A = 4.9795$. Dieser Effekt ist kleiner als 1 % und kann in praktischen Anwendungen oft vernachlässigt werden.

2.11 Abtastung und Rekonstruktion

a) Die Abtastfrequenz ω_A ergibt sich zu

$$\omega_A = 4 \cdot \omega_G = 400$$

b) Das Signal $u_M(t)$ lautet

$$u_M(t) = 2 \text{ V} \cdot \sin(\omega_G \cdot t)$$

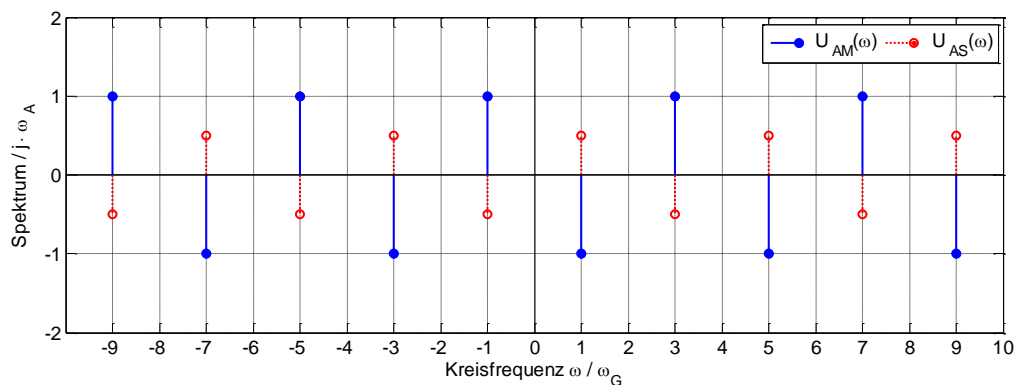
Es besitzt das Spektrum

$$U_M(\omega) = 2 \text{ V} \cdot j \cdot \pi \cdot (\delta(\omega + \omega_G) - \delta(\omega - \omega_G))$$

Durch den idealen Abtastvorgang wird das Signal mit $1/T_A$ skaliert und periodisch in ω_A fortgesetzt.

$$\begin{aligned} U_{MA}(\omega) &= \frac{2 \text{ V} \cdot j \cdot \pi}{T_A} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\delta(\omega + \omega_G - n \cdot \omega_A) - \delta(\omega - \omega_G - n \cdot \omega_A)) \\ &= 1 \text{ V} \cdot j \cdot \omega_A \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\delta(\omega + \omega_G - n \cdot \omega_A) - \delta(\omega - \omega_G - n \cdot \omega_A)) \end{aligned}$$

c) Das Spektrums $U_{MA}(\omega)$ ist folgendem Diagramm dargestellt.



d) Das Signal $u_S(t)$ lautet

$$u_S(t) = 1 \text{ V} \cdot \sin(7 \cdot \omega_G \cdot t)$$

Es ist ebenfalls sinusförmig und besitzt das Spektrum

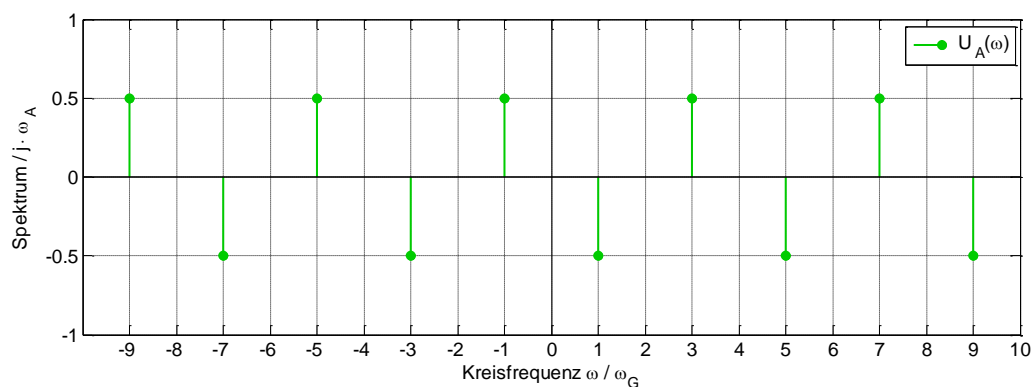
$$U_S(\omega) = 1 \text{ V} \cdot j \cdot \pi \cdot (\delta(\omega + 7 \cdot \omega_G) - \delta(\omega - 7 \cdot \omega_G))$$

Durch den idealen Abtastvorgang wird das Signal mit $1/T_A$ skaliert und periodisch in ω_A fortgesetzt.

$$\begin{aligned} U_{SA}(\omega) &= \frac{1 \text{ V} \cdot j \cdot \pi}{T_A} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\delta(\omega + 7 \cdot \omega_G - n \cdot \omega_A) - \delta(\omega - 7 \cdot \omega_G - n \cdot \omega_A)) \\ &= 0,5 \text{ V} \cdot j \cdot \omega_A \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\delta(\omega + 7 \cdot \omega_G - n \cdot \omega_A) - \delta(\omega - 7 \cdot \omega_G - n \cdot \omega_A)) \end{aligned}$$

e) Das Spektrums $U_{SA}(\omega)$ ist dem Diagramm oben bereits eingezeichnet.

f) Die Überlagerung der periodischen Spektren ist in dem folgenden Diagramm eingezeichnet.



Es ist ein periodisches Spektrum, bei dem sich die Amplituden aufgrund des umgekehrten Vorzeichens destruktiv überlagern. Aus der grafischen Darstellung ergibt sich

$$U_A(\omega) = 0,5 \text{ V} \cdot j \cdot \omega_A \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\delta(\omega + \omega_G - n \cdot \omega_A) - \delta(\omega - \omega_G - n \cdot \omega_A))$$

g) Die Gleichung beschreibt die Faltung von gewichteten Impulsen mit einer Rechteckfunktion der Länge T_A . Da die Faltung einer Funktion mit Impulsen an der Stelle $k \cdot T_A$ die Funktion an die Stelle der Impulse entspricht, beschreibt die Gleichung ein Signal, das den Abtastwert $u_A(k \cdot T_A)$ für ein Abtastperiode konstant hält. Das entspricht der Wirkung eines Zero-Order-Hold Glieds.

h) Eine Faltung im Zeitbereich entspricht eine Multiplikation der Spektren im Frequenzbereich. Die Rechteckfunktion

$$w(t) = \sigma(t) - \sigma(t - T_A)$$

hat das Spektrum

$$W(\omega) = \frac{2}{\omega} \cdot \sin\left(\frac{\omega \cdot T_A}{2}\right) \cdot e^{-j \frac{\omega \cdot T_A}{2}}$$

Damit lautet das Spektrum des Signals nach dem Halteglied

$$U_H(\omega) = 0.5 \text{ V} \cdot \frac{2}{\omega} \cdot \sin\left(\frac{\omega \cdot T_A}{2}\right) \cdot e^{-j \frac{\omega \cdot T_A}{2}} \cdot j \cdot \omega_A \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\delta(\omega + \omega_G - n \cdot \omega_A) - \delta(\omega - \omega_G - n \cdot \omega_A))$$

i) Durch den Tiefpass wird das Spektrum mit dem Frequenzgang multipliziert. Der Tiefpass ist stabil, und er hat den Frequenzgang

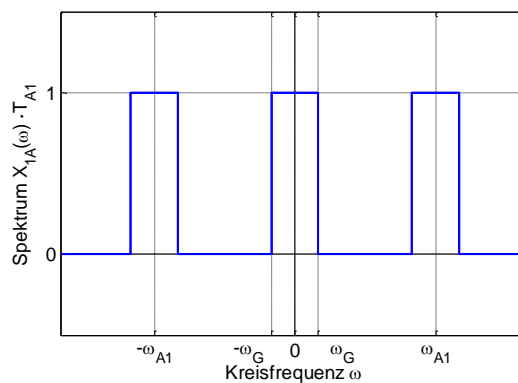
$$G(\omega) = \frac{1}{1 + \frac{j \cdot \omega}{\omega_G}}$$

Nach dem Tiefpass ergibt sich damit das Spektrum

$$U_{TP}(\omega) = 0.5 \text{ V} \cdot \frac{2}{\omega} \cdot \sin\left(\frac{\omega \cdot T_A}{2}\right) \cdot e^{-j \frac{\omega \cdot T_A}{2}} \cdot j \cdot \omega_A \cdot \frac{1}{1 + \frac{j \cdot \omega}{\omega_G}} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\delta(\omega + \omega_G - n \cdot \omega_A) - \delta(\omega - \omega_G - n \cdot \omega_A))$$

2.12 Interpolation im Zeitbereich

a) Das Spektrum wird in ω_{A1} periodisch fortgesetzt und mit dem Faktor $1/T_{A1}$ multipliziert.



b) Für das Signal $x_{2A}(t)$ gilt zu den Abtastzeitpunkten mit geraden Indizes

$$x_2(2 \cdot k \cdot T_{A2}) = x_1(k \cdot T_{A1}) \text{ mit } T_{A2} = \frac{1}{2} \cdot T_{A1}$$

und bei ungeraden Indizes

$$x_2((2 \cdot k + 1) \cdot T_{A2}) = \frac{1}{2} \cdot (x_1((k \cdot T_{A1}) + x_1((k + 1) \cdot T_{A1})))$$

Das abgetastete Signal x_{2A} kann damit dargestellt werden als

$$x_{2A}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k \cdot T_{A1}) \cdot \delta(t - k \cdot T_{A1}) + \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} (x_1(k \cdot T_{A1}) + x_1((k+1) \cdot T_{A1})) \cdot \delta\left(t - \frac{2 \cdot k + 1}{2} \cdot T_{A1}\right)$$

c) Das Spektrum der ersten Summe ist das bereits bekannte Spektrum des in T_{A1} abgetasteten Signals aus Teil a). Das Spektrum der zweiten Summe wird in zwei Schritten berechnet. Das Spektrum eines Signals x_3 ergibt sich zu $X_3(\omega)$

$$x_{3A}(t) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} (x_1(k \cdot T_{A1}) + x_1((k+1) \cdot T_{A1})) \cdot \delta(t - k \cdot T_{A1})$$

$$X_{3A}(\omega) = \frac{1}{2} \cdot (1 + e^{j\omega T_{A1}}) \cdot X_{1A}(\omega)$$

Durch die Verschiebung um $T_{A1}/2$ ergibt sich im Zeitbereich das gesuchte Signal x_4 mit dem Spektrum $X_4(\omega)$

$$x_{4A}(t) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} (x_1(k \cdot T_{A1}) + x_1((k+1) \cdot T_{A1})) \cdot \delta\left(t - \frac{2 \cdot k + 1}{2} \cdot T_{A1}\right)$$

$$X_{4A}(\omega) = \frac{1}{2} \cdot (1 + e^{j\omega T_{A1}}) \cdot X_1(\omega) \cdot e^{-j\omega \frac{T_{A1}}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \left(e^{-j\omega \frac{T_{A1}}{2}} + e^{j\omega \frac{T_{A1}}{2}} \right) \cdot X_1(\omega) = \cos\left(\frac{\omega \cdot T_{A1}}{2}\right) \cdot X_1(\omega)$$

Das gesamte Spektrum des Signals $X_{2A}(\omega)$ ergibt sich zu

$$X_{2A}(\omega) = X_{1A}(\omega) + \cos\left(\frac{\omega \cdot T_{A1}}{2}\right) \cdot X_{1A}(\omega) = X_{1A}(\omega) \cdot \left(1 + \cos\left(\frac{\omega \cdot T_{A1}}{2}\right)\right)$$

d) Die interpolierte Funktion ist eine Näherung an die Abtastung mit der doppelten Abtastfrequenz, allerdings wird das Spektrum des Basisbands im Bereich hoher Frequenzen gedämpft und die erste periodische Fortsetzung des Spektrums in ω_A nicht vollständig gedämpft.

