Hochschule Karlsruhe
Technik und Wirtschaft
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES
Näher dran.

EIT Fakultät für Elektro- und Informationstechnik

Systemtheorie

Vorlesung 4: Beschreibung periodischer Vorgänge

Fakultät für Elektro- und Informationstechnik, Manfred Strohrmann

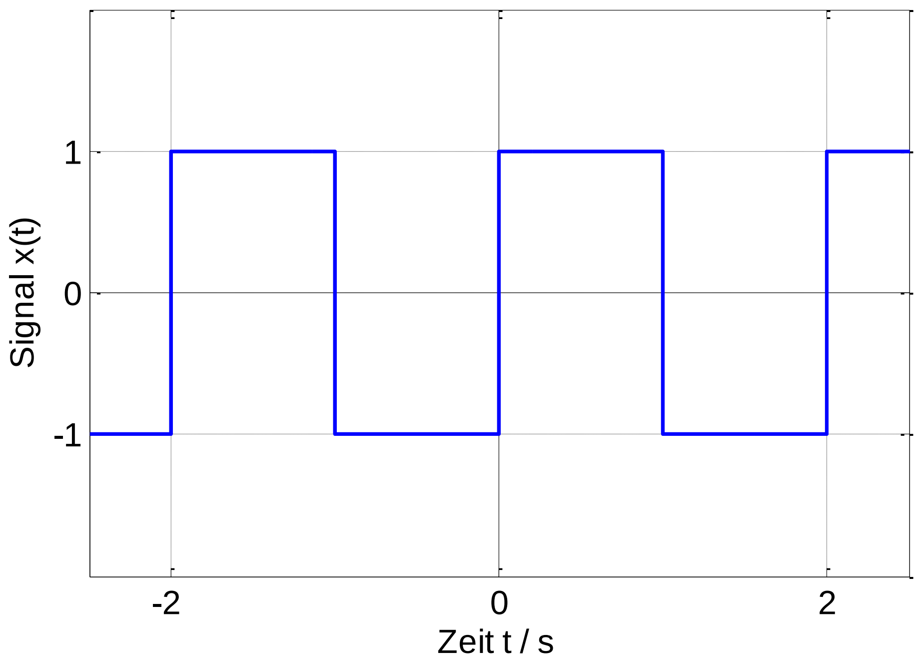
Zeitkontinuierliche Signale

Einschwingvorgänge – Periodische Funktionen

- Periodische Funktionen sind dadurch gekennzeichnet, dass sich der Funktionswert periodisch nach einer Zeitdauer T_0 wiederholt
- Beispiel periodische Rechtecksignal
- Für periodische Funktionen und ganzzahlige Werte n gilt

  $$x(t) = x(t + n \cdot T_0)$$

- Neben den Funktionen, die das Ein-, Aus- oder Umschalten modellieren, sind in der Systemtheorie periodische, harmonische Signale von großer Bedeutung



Zeitkontinuierliche Signale

Einschwingvorgänge – Harmonische Funktionen

- Definition harmonischer Signale mit der Kosinusfunktion

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi) = A \cdot \cos(\omega \cdot (t + t_0))$$

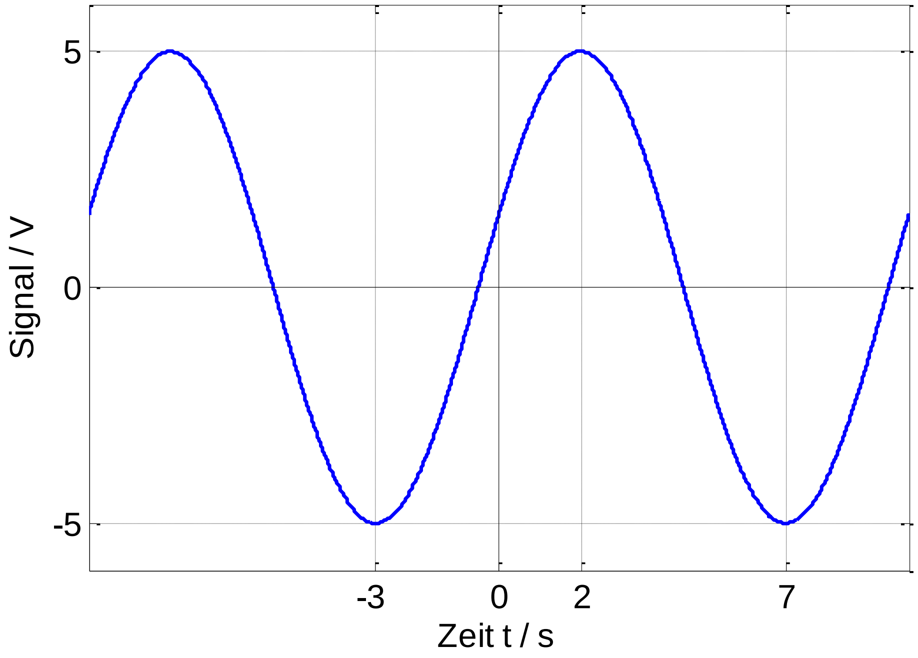
mit der Zeitverschiebung t_0, dem Nullphasen-winkel φ, der Kreisfrequenz ω und der Amplitude A

- Bestimmung des Nullphasenwinkel über die Zeitverschiebung

$$t_0 = \frac{\varphi}{\omega}$$

- Kreisfrequenz ist definiert als

$$\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T_0} = 2 \cdot \pi \cdot f$$



Zeitkontinuierliche Signale

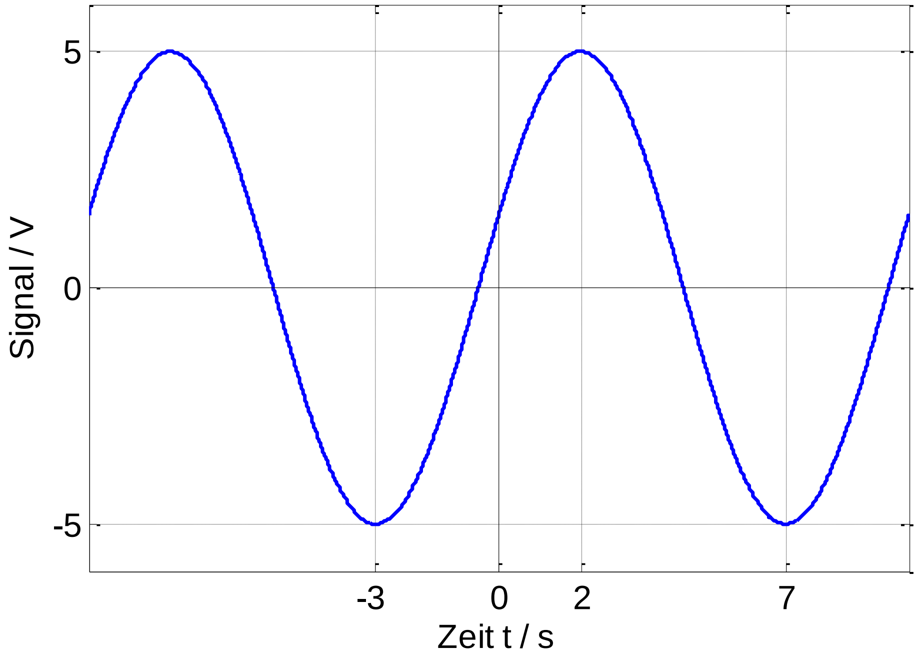
Beispiel: Einschwingvorgänge – Harmonische Funktionen

- Beispiel mit einer Amplitude 5 V
- Kosinusfunktion hat zwei aufeinander folgende Minima bei t = - 3 s und t = 7 s, woraus sich eine Periodendauer von T_0 = 10 s ergibt
- Nullphase φ ist nicht unmittelbar aus dem Diagramm ablesbar, über die zeitliche Verzögerung

$$t_0 = \frac{\varphi}{2 \cdot \pi \cdot f} = \frac{\varphi}{2 \cdot \pi} \cdot T = -2\ \text{s}$$

kann der Nullphasenwinkel φ berechnet werden zu

$$\varphi = -\frac{2 \cdot \pi \cdot 2\ \text{s}}{10\ \text{s}} = -\frac{2 \cdot \pi}{5}$$



Zeitkontinuierliche Signale

Einschwingvorgänge – Harmonische Funktionen

- In der Elektrotechnik hat sich für die Berechnung von harmonisch angeregten Schaltungen die Zeigerdarstellung durchgesetzt
- Eulerschen Formel

$$e^{j\cdot\varphi} = \cos(\varphi) + j\cdot\sin(\varphi)$$

- Damit kann eine Kosinusfunktion der Form

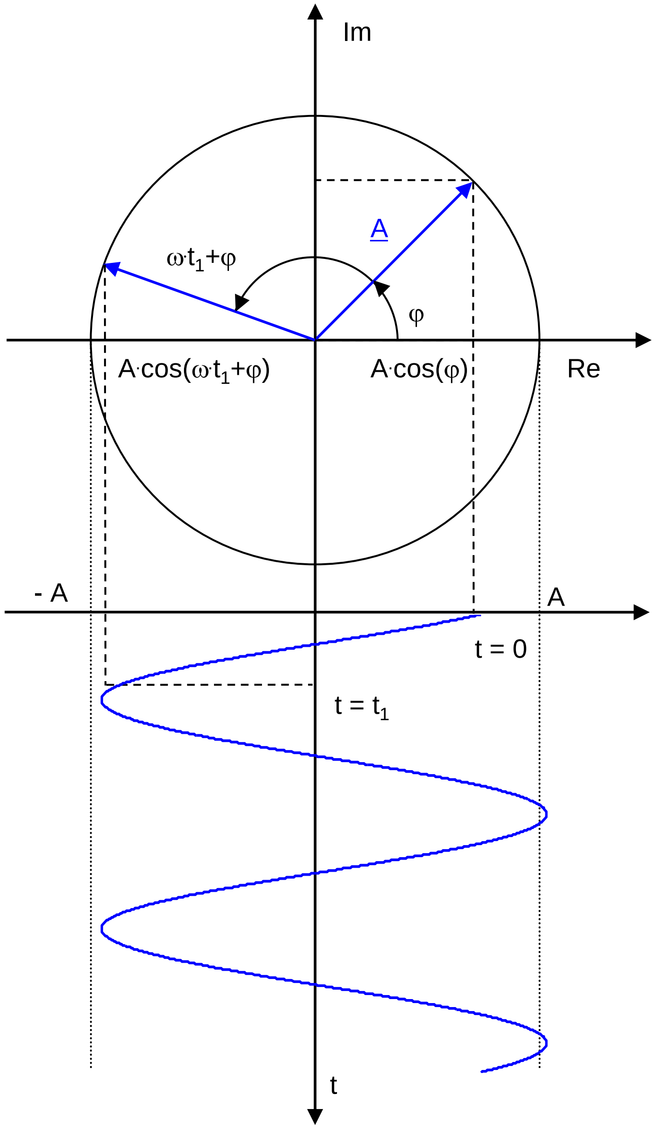
$$x(t) = A\cdot\cos(\omega\cdot t+\varphi)$$

als Realteil einer komplexen Funktion

$$z(t) = A\cdot e^{j\cdot(\omega\cdot t+\varphi)} = A\cdot e^{j\cdot\varphi}\cdot e^{j\cdot\omega\cdot t}$$

$$= A\cdot\left(\cos(\omega\cdot t+\varphi) + j\cdot\sin(\omega\cdot t+\varphi)\right)$$

aufgefasst werden

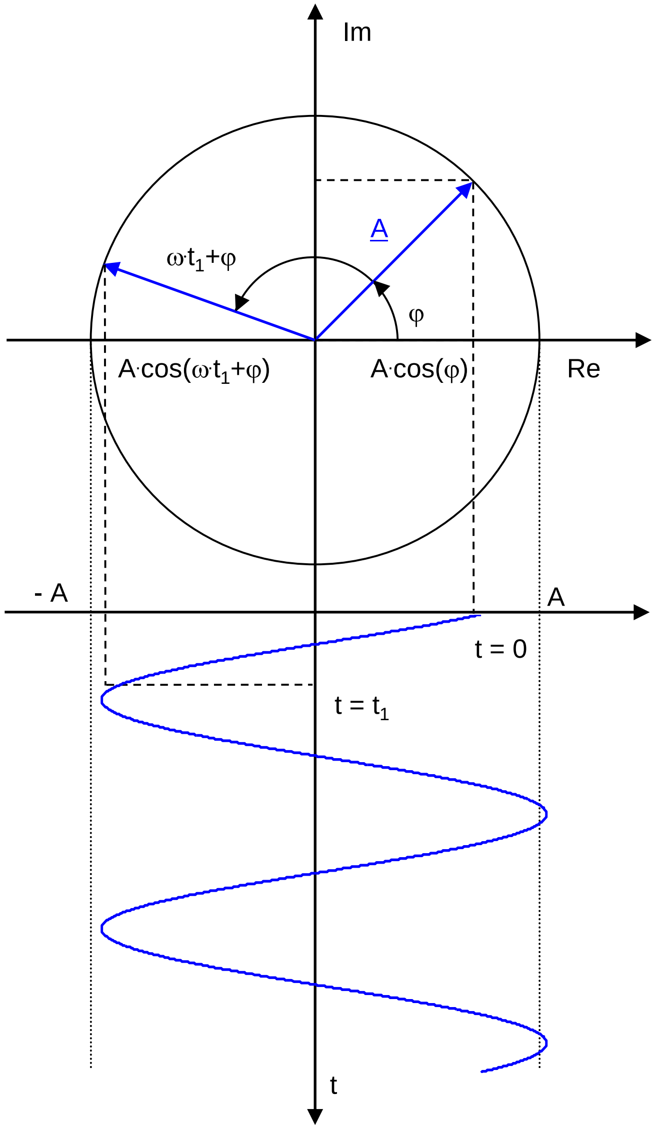


Zeitkontinuierliche Signale

Einschwingvorgänge – Harmonische Funktionen

- Mathematische Darstellung kann durch einen Zeiger der Länge A verdeutlicht werden, der in der komplexen Ebene um den Koordinatenursprung rotiert
- Zeit für eine volle Umdrehung ist die Periodendauer T_0, eigentlich interessierende Größe ist die Projektion des Zeigers auf die reelle Achse
- Komplexe Amplitude $\underline{A}$ kennzeichnet das Verhalten für t = 0

$$z(0) = A \cdot e^{j \cdot \varphi} = A \cdot \cos(\varphi) + j \cdot A \cdot \sin(\varphi) = \underline{A}$$



Einschwingvorgänge – Harmonische Funktionen

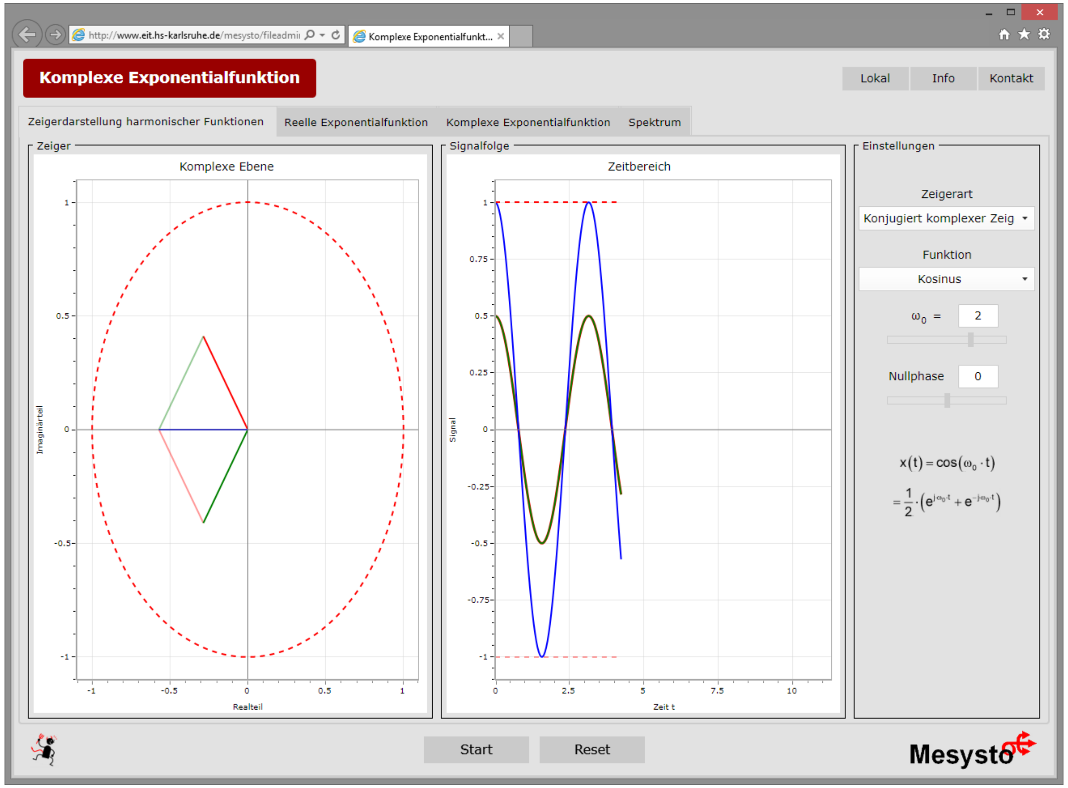
- Darstellung komplexer Zeiger wird mit Applikation Komplexe Exponentialfunktion auf Systemtheorie Online verdeutlicht
- Zwei Arten der Darstellung
  - Realteil einer komplexen Funktion

    $$x(t) = \mathrm{Re}\left(A \cdot e^{j\cdot\varphi} \cdot e^{j\cdot\omega\cdot t}\right)$$

  - Darstellung mit zwei konjugiert komplexen Zeigern

    $$x(t) = A \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi)$$
    $$= \frac{1}{2} \cdot \left(A \cdot e^{j\cdot\varphi} \cdot e^{j\cdot\omega\cdot t} + A \cdot e^{-j\cdot\varphi} \cdot e^{-j\cdot\omega\cdot t}\right)$$

- Darstellung als Zeiger und als Zeitfunktion



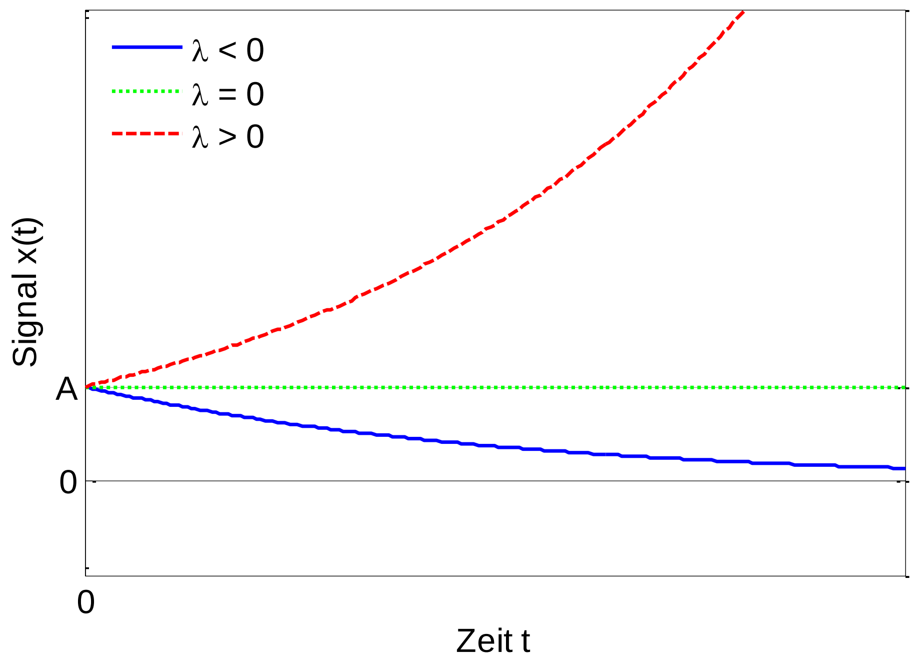
Zeitkontinuierliche Signale

Einschwingvorgänge – Exponentialfunktionen

- Exponentialfunktion ist für die Beschreibung des Einschwingverhaltens wesentlich

  $$x(t) = A \cdot e^{\lambda \cdot t} \cdot \sigma(t)$$

- Zeitverhalten der Exponentialfunktion für unterschiedliche reelle Parameter λ und t > 0
- Exponentialfunktion beginnt für alle Parameter λ an der Stelle x(t = 0) = A
- λ > 0: Exponentialfunktion steigt
- λ < 0: Exponentialfunktion nähert sich x = 0
- λ = 0: Exponentialfunktion bleibt konstant



Zeitkontinuierliche Signale

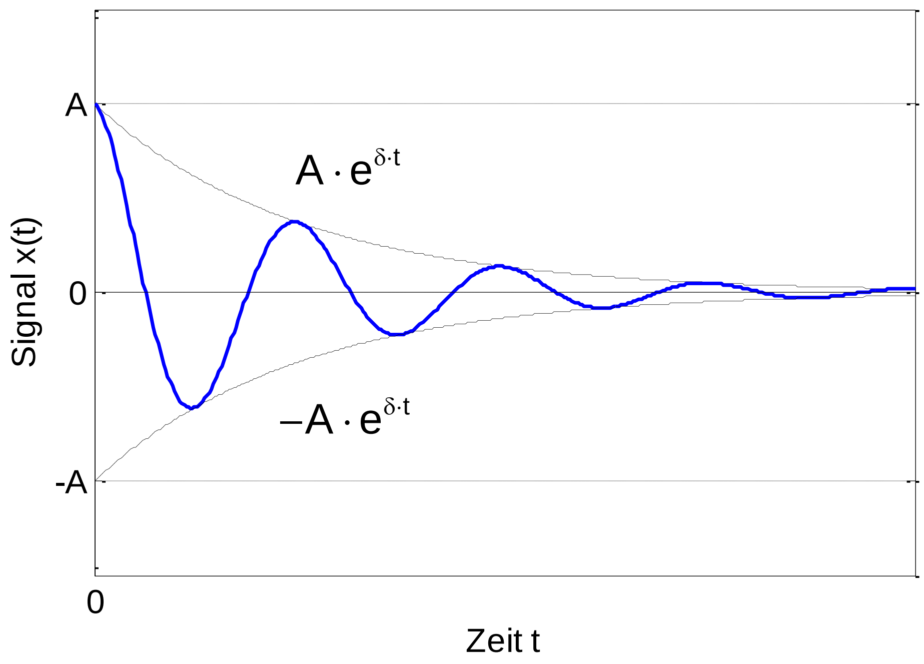
Einschwingvorgänge – Exponentialfunktionen

- Außer reellen und imaginären Argumenten können bei Exponentialfunktionen auch komplexe Argumente λ auftreten
- n diesem Fall kann die Exponentialfunktion in zwei Faktoren zerlegt werden

$$e^{\lambda\cdot t} = e^{(\delta+j\cdot\omega)\cdot t} = e^{\delta\cdot t}\cdot e^{j\cdot\omega\cdot t}$$

- Beschreibung von harmonischen Schwingungen veränderlicher Amplitude

$$\begin{aligned} x(t) &= A\cdot e^{\delta\cdot t}\cdot\cos(\omega\cdot t)\cdot\sigma(t) \\ &= \frac{1}{2}\cdot A\cdot e^{\delta\cdot t}\cdot\left(e^{j\cdot\omega\cdot t}+e^{-j\cdot\omega\cdot t}\right)\cdot\sigma(t) \\ &= \frac{1}{2}\cdot A\cdot\left(e^{(\delta+j\cdot\omega)\cdot t}+e^{(\delta-j\cdot\omega)\cdot t}\right)\cdot\sigma(t) \end{aligned}$$



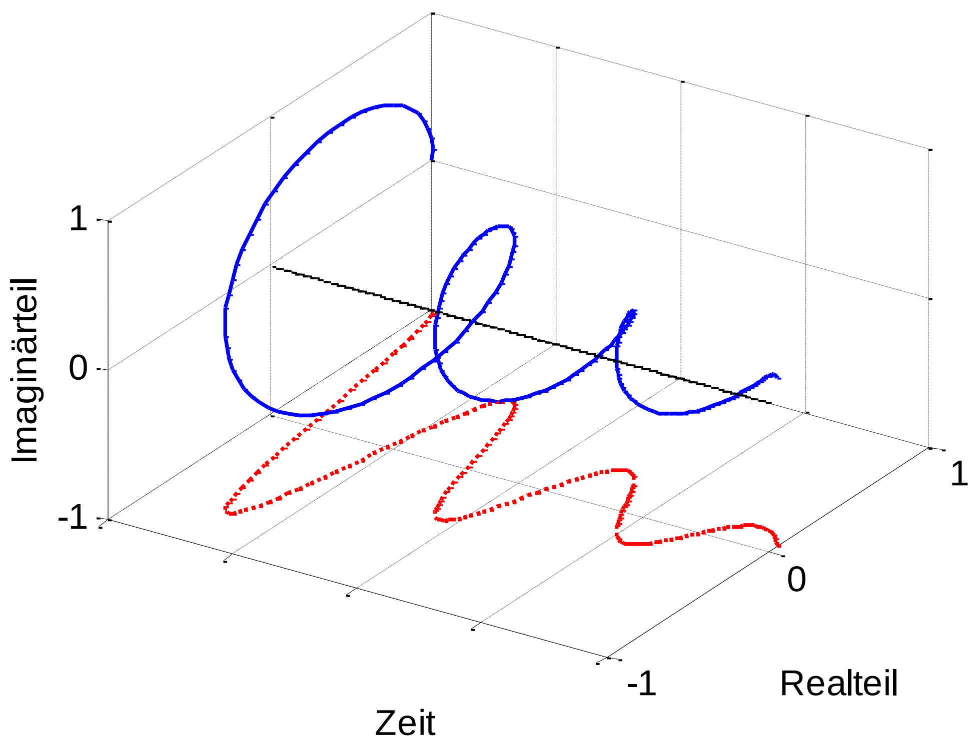
Zeitkontinuierliche Signale

Einschwingvorgänge – Exponentialfunktionen

- Bild zeigt eine räumliche Darstellung der komplexen Exponentialfunktion und die Projektion der Funktion auf die Realteil-Zeit-Ebene
- Projektion der komplexen Exponentialfunktion auf die Realteil-Zeit-Ebene ergibt die abklingende harmonische Schwingung

$$x(t) = A \cdot e^{\delta \cdot t} \cdot \cos(\omega \cdot t) \cdot \sigma(t)$$

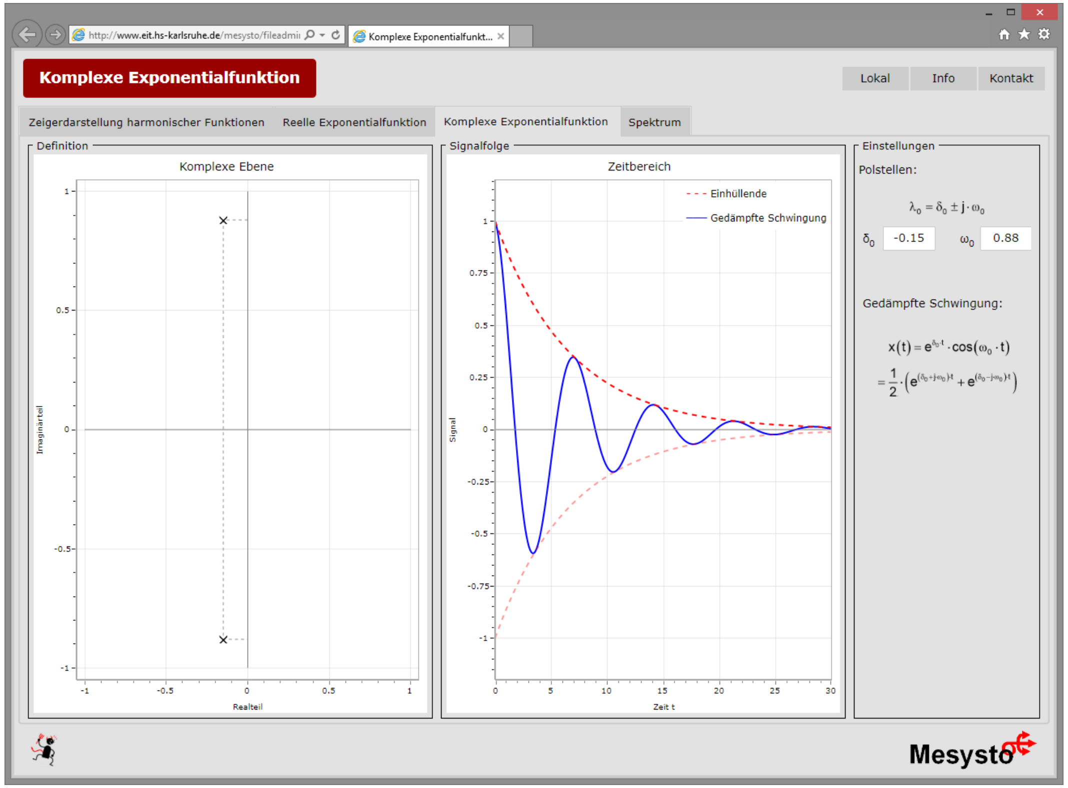
- Je nach Lage des Wertes $\lambda = \delta + j \cdot \omega$ in der komplexen Ebene, ergeben sich charakteristische Verhalten der komplexen Exponentialfunktion



Zeitkontinuierliche Signale

Einschwingvorgänge – Exponentialfunktionen

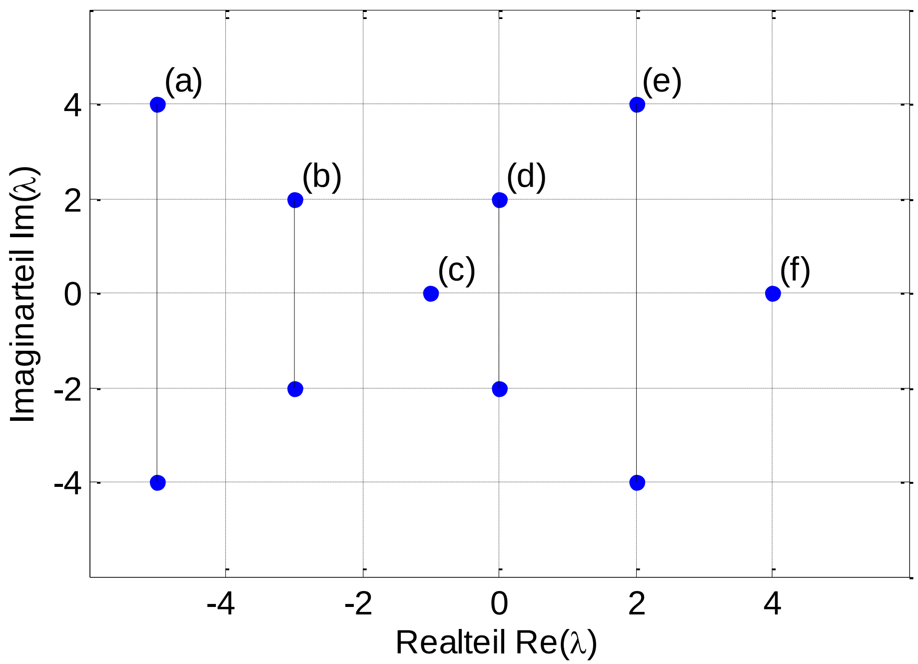
- Zusammenhang zwischen Wertes $\lambda = \delta_0 + j \cdot \omega_0$ und der Schwingung wird mit Applikation Komplexe Exponentialfunktion auf Systemtheorie Online verdeutlicht
- Parameter λ_0 wird durch Klicken in die komplexe Ebene festgelegt und ggf. durch einen konjugiert komplexen Wert ergänzt
- Schwingung und Einhüllende der Schwingung werden berechnet und dargestellt



Zeitkontinuierliche Signale

Übungsaufgabe: Einschwingvorgänge – Exponentialfunktionen

- Skizzieren Sie für die in der komplexen Ebene dargestellten Koeffizienten λ die Exponentialfunktionen als Funktion der Zeit
- Geben Sie für alle komplexen Parameter an, mit welcher Frequenz die entsprechende harmonische Schwingung schwingt und wie sich die Amplitude mit der Zeit ändert



Zeitkontinuierliche Signale

Übungsaufgabe: Einschwingvorgänge – Exponentialfunktionen

- Stellen Sie die Signale $x_i(t)$ als Summe komplexer Exponentialfunktionen der Form

  $$x(t) = \sum A_i \cdot e^{\lambda_i \cdot t}$$

  dar.

  $$x_1(t) = 2 \cdot e^{-0.5 \cdot t} \cdot \cos(4 \cdot \pi \cdot t)$$

  $$x_2(t) = e^{0.1 \cdot t} \cdot \sin(\pi \cdot t)$$

  $$x_3(t) = e^{-t}$$

- Skizzieren sie Lage der Koeffizienten λ_i in der komplexen Ebene